

Un des "problèmes plaisans et délectables" de Claude Berge

à la mémoire de Claude Berge (1926 - 2002)

David AVIS

Antoine DEZA

4 octobre 2003

Résumé.

Dans une rubrique de la Revue Française de Recherche Opérationnelle intitulée *Problèmes plaisans et délectables* en hommage à l'œuvre du 17^{ème} siècle de Bachet, Berge proposa en 1966 un problème d'ordonnement de n jetons alternativement noirs et blancs à l'aide d'un coup qui déplace 2 jetons adjacents. Notant $h(n)$ le nombre minimum de coups nécessaires pour obtenir une séquence de jetons blancs suivis de jetons noirs, Berge montre que $h(5) = 3$, $h(6) = 3$ et $h(7) = 4$ et semble indiquer que la fonction $h(n)$ est croissante. Dans cette note nous montrons que $h(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ pour $n \geq 5$.

Abstract

Between 1962 and 1966 Claude Berge edited a series of columns that appeared in the Revue Française de Recherche Opérationnelle, entitled *Problèmes plaisans et délectables*, in homage of the 17th century work of Bachet. Each of these columns gives a new problem, along with solutions for earlier problems supplied by readers. The last of these columns contains a sorting problem, problem 41, in which we are given a string of n alternately white and black pegs on a one dimensional board consisting of an unlimited number of empty holes. We are required to rearrange the pegs into a string of consecutive white and black pegs, using only moves which take a pair of adjacent pegs to two vacant adjacent holes. With $h(n)$ denoting the minimum number of moves needed to obtain a string of white pegs followed by black pegs, Berge gives the values $h(5) = 3$, $h(6) = 3$ and $h(7) = 4$ and asks the reader to determine whether or not the function $h(n)$ is increasing. This was the last issue of the Revue, and as far as we can tell, no solution has been published. In this note we offer a solution to problem 41 by showing that $h(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ for $n \geq 5$.

1 Introduction

La Revue Française de Recherche Opérationnelle comprenait une rubrique intitulée *Problèmes plaisants et délectables* en hommage au recueil d'exercices publié en 1612 par Bachet [1]. En 1966, dans le numéro 41 de la revue, Berge [2] y proposa le problème suivant.

LE PROBLÈME DES JETONS NOIRS ET DES JETONS BLANCS

Pour $n \geq 5$, considérons une rangée de carrés alignés côte à côte; sur n carrés consécutifs, plaçons $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ jetons noirs et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ jetons blancs en alternant les couleurs, comme pour les 5 jetons de la Figure 1.1. Il s'agit à chaque coup, de prendre deux jetons sur deux carrés adjacents et de les placer dans le même ordre sur deux carrés vides adjacents. Comment procéder pour obtenir une séquence de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ jetons blancs suivis de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ jetons noirs et quel est le nombre minimum $h(n)$ de coups nécessaires?

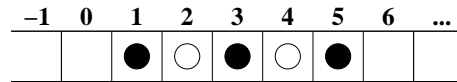


Figure 1.1: Une séquence de 5 jetons à ordonner en 3 coups

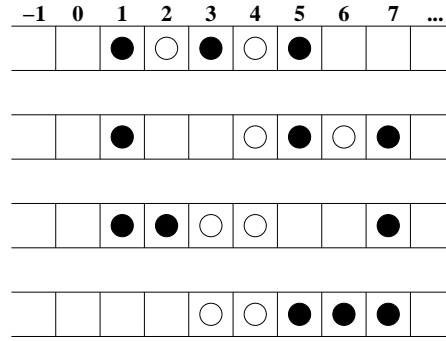
Avoir montré que $h(5) = 3$, $h(6) = 3$ et $h(7) = 4$, Berge semble indiquer que la fonction $h(n)$ est nécessairement croissante. Dans la Section 2 nous montrons que $h(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

2 Une solution optimale en $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ coups

Nous donnons d'abord explicitement une solution \mathcal{S}_n en $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ coups avant de prouver par le Lemme 2.2 que cette solution est optimale.

2.1 Une solution en $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ coups

La notation choisie est la suivante. Le coup qui consiste à prendre les deux jetons sur les positions j et $j+1$ et à les placer dans le même ordre sur les positions i et $i+1$ est noté $\{i \ j\}$. La succession des coups $\{i \ j\}$ et $\{k \ l\}$ est notée $\{i \ j\} \cup \{k \ l\}$. La succession $\{i \ j\} \cup \{j \ k\}$ est simplement notée $\{i \ j \ k\}$. Plus généralement, $\{i \ j \ k \ l \ \dots\}$ désigne l'enchaînement des coups $\{i \ j\}$ suivi de $\{j \ k\}$ puis de $\{k \ l\}$ puis de ... Initialement le premier jeton noir est sur la position 1 et le dernier jeton est sur la position n . Par exemple, la solution en 3 coups pour $n = 5$ est $\mathcal{S}_5 = \{6 \ 2 \ 5 \ 1\}$, voir la Figure 2.2. Il est facile de vérifier que $\mathcal{S}_6 = \{7 \ 4 \ 1\} \cup \{9 \ 3\}$ et $\mathcal{S}_7 = \{8 \ 5 \ 2 \ 8 \ 1\}$ sont des solutions en respectivement 3 et 4 coups pour respectivement $n = 6$ et $n = 7$.

Figure 2.2: La solution $\mathcal{S}_5 = \{6 \ 2 \ 5 \ 1\}$ pour ordonner 5 jetons en 3 coups

Pour $n \geq 8$, les cas n pair et n impair sont étudiés séparément et l'expression de \mathcal{S}_n devient régulière. Considérons d'abord le cas n pair. Les premières solutions \mathcal{S}_n pour $n = 4k$ et $n = 4k + 2$ avec k entier sont données par les Tables 1 et 2 où l'espace correspondant au $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ -ème coup est ajusté de manière à faire apparaître la structure de \mathcal{S}_n . Le lecteur peut facilement en déduire l'expression générale de \mathcal{S}_{4k} et de \mathcal{S}_{4k+2} par récurrence. Il est également aisé de vérifier que les $\frac{n}{2}$ coups de \mathcal{S}_n donnent bien une séquence de $\frac{n}{2}$ jetons blancs suivis de $\frac{n}{2}$ jetons noirs. On peut notamment remarquer que les $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ premiers coups consistent à mettre par deux les jetons de même couleur et que les $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ coups restants sont une des manières de classer les couples de jetons de même couleur ainsi obtenus. La Proposition 2.1, qui se démontre facilement par récurrence, souligne les caractéristiques de la solution \mathcal{S}_n .

Proposition 2.1 *Pour n pair et $n \geq 8$, \mathcal{S}_n satisfait les propriétés suivantes:*

- (i) *après les $\frac{n}{2}$ coups de \mathcal{S}_n , les $\frac{n}{2}$ jetons blancs sont sur les positions 3 à $\frac{n+4}{2}$ suivis des $\frac{n}{2}$ jetons noirs sur les positions $\frac{n+6}{2}$ à $n+2$;*
- (ii) *après les $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ premiers coups \mathcal{S}_n , tous les jetons noirs (resp. blancs) situés à gauche (resp. droite) de la position $\frac{n+4}{2}$ sont groupés en $\frac{n-2}{2}$ paires de même couleur;*
- (iii) *la paire de jetons sur les positions $n-1$ et n n'est jamais déplacée.*

Table 1: Premières solutions en $2k$ coups pour $n = 4k$

\mathcal{S}_8	=	{9	2	5								8	1}				
\mathcal{S}_{12}	=	{13	2	5	10							6	12	1}			
\mathcal{S}_{16}	=	{17	2	5	12	9						13	6	16	1}		
\mathcal{S}_{20}	=	{21	2	5	14	9	18					10	15	6	20	1}	
\mathcal{S}_{24}	=	{25	2	5	16	9	20	13				21	10	17	6	24	1}
\mathcal{S}_{28}	=	{29	2	5	18	9	22	13	26	14	23	10	19	6	28	1}	

2.2 Une borne inférieure pour le nombre minimum de coups nécessaires

Nous prouvons ensuite qu'au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sont nécessaires pour obtenir une séquence de jetons blancs suivis de jetons noirs. Autrement dit, nous avons:

Lemme 2.2 *Pour $n \geq 5$, le nombre $h(n)$ minimum de coups satisfait $h(n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Preuve. Le nombre de jetons qui, après le i -ème coup, sont suivis soit d'un carré vide soit d'un jeton d'une couleur différente est appelé le *désordre* et est noté $\mathcal{D}_n(i)$. Il est facile d'observer que nous avons $|\mathcal{D}_n(i) - \mathcal{D}_n(i+1)| \leq 2$. Un coup tel que $\mathcal{D}_n(i) - \mathcal{D}_n(i+1) = 2$ (resp. 1 et 0) est appelé un coup *optimal* (resp. *sous-optimal* et *neutre*). Le désordre de la position initiale est $\mathcal{D}_n(0) = n$ et celui de la position finale est $\mathcal{D}_n(h(n)) = 2$. Le coup initial ne pouvant pas être optimal, nous en déduisons immédiatement que $h(n) \geq \frac{n}{2}$ pour n pair. Nous remarquons ensuite que, pour n impair, un coup initial sous-optimal place un jeton blanc à l'extrême droite de la rangée en position $n+2$. Ce jeton blanc ne pouvant pas être replacé à gauche de tous les jetons noirs sans que soit joué un autre coup sous-optimal, nous obtenons que $h(n) \geq \frac{n+1}{2}$ pour n impair. \square

3 Quelques problèmes similaires

Le problème des jetons noirs et des jetons blancs peut être généralisé de plusieurs manières. Identifiant les jetons noirs à des 1 et les jetons blancs à des 0, nous proposons 3 problèmes de tri utilisant le même coup que celui introduit par Berge et que nous appelons donc le *coup de Berge*.

- (1) La séquence initiale est généralisée à une $\{0, 1\}$ -séquence quelconque de longueur n . Le nombre minimum de coups nécessaires pour obtenir la séquence $0 \dots 0 1 \dots 1$ est noté \mathcal{H}_n . Le Lemme 2.2 implique que $\mathcal{H}_n \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. A part la séquence alternée $1010 \dots$ quelle autre séquence peut être triée en $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ coups de Berge?
- (2) La séquence initiale est généralisée à une $\{0, 1, \dots, 9\}$ -séquence et la séquence finale est $0 \dots 0 1 \dots 1 \dots 9 \dots 9$. Quel est le nombre minimum de coups de Berge nécessaires?
- (3) La séquence initiale est composée de n entiers. Quel est le nombre minimum de coups de Berge nécessaires pour trier ces n entiers?

Le problème initial des jetons noirs et des jetons blancs proposé par Claude Berge ainsi que la généralisation (1) sont illustrés par le jeu conçu par Jean-Luc Fouquet qui propose également une généralisation au plan, voir [5]. Une autre généralisation consiste en un coup qui déplace k jetons adjacents, voir [3, 4] où Antoine Deza and William Hua conjecture que le nombre minimum de k -coups de Berge nécessaires pour trier la séquence alternée est $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ pour $n \geq 2k + 11$.

Remerciements

Nous remercions Birgit Bock pour son aide bibliographique.

Bibliographie

1. Claude Gaspard Bachet de Méziriac, Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres. Partie recueillie de divers auteurs, et inventez de nouveau avec leur démonstration, par Claude Gaspard Bachet, Sr de Méziriac. Très utile pour toutes sortes de personnes curieuses, qui se servent d'arithmétique, A Lyon, chez Pierre Rigaud (1612), seconde édition (1624).
2. Claude Berge, Problèmes plaisans et délectables, le problème des jetons noirs et des jetons blanc, *Revue Française de Recherche Opérationnelle* 41 (1966) 388.
3. Antoine Deza, http://www.cas.mcmaster.ca/~deza/berge_sorting.html (2005).
4. Antoine Deza and William Hua, Generalized Berge moves. *AdvOL-Report* 2005/11, McMaster University (2005).
5. Jean-Luc Fouquet, <http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/JeuClaudeBerge.zip>, (2003).

David AVIS

McGill University, School of Computer Science and GERAD, 3480 University, Montréal, H3A 2A7, Canada. (avis@cs.mcgill.ca)

Antoine DEZA

McMaster University, Department of Computing and Software, 1280 Main Street West Hamilton, L8S 4K1, Canada. (deza@mcmaster.ca)