1

序説

この短い章では，線形計画法とは何かを説明し，この主題の歴史を概観する．

栄養の問題

ポリーは，彼女が毎日必要とするエネルギー（2,000kcal），蛋白質（55 g），カルシウム（800mg）を摂取するために，食物にお金をいくら使わねばならないか考えている．（鉄分やビタミンは錠剤から取ることにしよう．栄養士達の賛成は得られないかもしれないが，導入のための例は簡単でなければならない．）彼女は，安価な栄養源として6種類の食物を選んだ．彼女のデータは表1．1にまとめてある．

表1．1　単位量当りの栄養量

食物	単位量	エネルギー (kcal)	蛋白質 (g)	カルシウム (mg)	単位量当り価格 (セント)
オートミール	28 g	110	4	2	3
鶏肉	100 g	205	32	12	24
卵	大2個	160	13	54	13
牛乳	237 cc	160	8	285	9
チェリーパイ	170 g	420	4	22	20
ポークビーンズ	260 g	260	14	80	19

そこで，彼女は献立をあれこれ考え始める．たとえば，10 単位のポークビーンズはたった（？）1.90 ドルで 1 日の必要量を満たす．しかし，ポークビーンズ 10 単位は随分量が多い――彼女の胃袋は 1 日せいぜい 2 単位しか消化できない．彼女は，これら 6 種類の食物について 1 日の食事量の限度を次のように決めた：

オートミール	4 単位/日 以下
鶏肉	3 単位/日 以下
卵	2 単位/日 以下
牛乳	8 単位/日 以下
チェリーパイ	2 単位/日 以下
ポークビーンズ	2 単位/日 以下．

さて，もう一度データをみればわかるように，毎日の牛乳 8 単位とチェリーパイ 2 単位は必要量をちゃんと満たし，その費用はたった 1.12 ドルである．実際には，パイまたは牛乳をもう少し減らせるし，別の組合せを考えてもよい．有望な組合せがたくさんあるので，最もよい組合せを求めて次々と試してみることもできる．この場合，手当り次第にやってもあまりうまくいかない．系統立てて考えるために，未定の献立がオートミール x_1 単位，鶏肉 x_2 単位，卵 x_3 単位，…からなるものと仮定しよう．食事量の限度を守るために，この献立は，不等式

$$
\begin{aligned}
&0 \leqq x_1 \leqq 4\\
&0 \leqq x_2 \leqq 3\\
&0 \leqq x_3 \leqq 2\\
&0 \leqq x_4 \leqq 8\\
&0 \leqq x_5 \leqq 2\\
&0 \leqq x_6 \leqq 2
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

を満足しなければならない．そして，もちろん，エネルギー，蛋白質，カルシウムの必要量の条件がある．それから次の不等式が得られる．

$$
\begin{aligned}
110x_1+205x_2+160x_3+160x_4+420x_5+260x_6 &\geqq 2{,}000\\
4x_1+\ 32x_2+\ 13x_3+\ \ 8x_4+\ \ 4x_5+\ 14x_6 &\geqq \ \ 55\\
2x_1+\ 12x_2+\ 54x_3+285x_4+\ 22x_5+\ 80x_6 &\geqq \ 800.
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

ある数 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ が不等式（1．1），（1．2）を満たすならば，これらは満足な献立を表す．この献立の 1 日当りの費用（セント）は，

$$3x_1+24x_2+13x_3+9x_4+20x_5+19x_6 \qquad (1.3)$$

となる．

最も経済的な献立を立てるために，ポリーは，（1．1），（1．2）を満たし，（1．3）の値をできるだけ小さくするような数 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ を求めたいと考える．数学者の表現を使えば，彼女は，

$$3x_1+24x_2+13x_3+9x_4+20x_5+19x_6$$

を，

$$
\begin{aligned}
&0 \leqq x_1 \leqq 4\\
&0 \leqq x_2 \leqq 3\\
&0 \leqq x_3 \leqq 2\\
&0 \leqq x_4 \leqq 8\\
&0 \leqq x_5 \leqq 2\\
&0 \leqq x_6 \leqq 2\\
110x_1+205x_2+160x_3+160x_4+420x_5+260x_6 &\geqq 2000\\
4x_1+\ 32x_2+\ 13x_3+\ \ 8x_4+\ \ 4x_5+\ 14x_6 &\geqq \ \ 55\\
2x_1+\ 12x_2+\ 54x_3+285x_4+\ 22x_5+\ 80x_6 &\geqq \ 800
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

という条件のもとで最小にするという問題を解きたいのである．彼女の問題は**栄養の問題**という名で知られている．

線形計画法

この種の問題は，“線形計画問題”または簡単に“LP 問題”と呼ばれる．線形計画法はこれらの問題に関する応用数学の一分野である．他の例を以下に示そう：

最大化：　$5x_1+4x_2+3x_3$

$$
\begin{aligned}
\text{制約：}\quad & 2x_1+3x_2+\ x_3 \leqq 5 \\
& 4x_1+\ x_2+2x_3 \leqq 11 \\
& 3x_1+4x_2+2x_3 \leqq 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqq 0.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

（ここで，“$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$”は“$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$”を簡略化した表現である.）

$$
\begin{aligned}
\text{最小化：}\quad & 3x_1-\ x_2 \\
\text{制約：}\quad & -x_1+6x_2-x_3+\ x_4 \geqq -3 \\
& 7x_2 \qquad\quad +2x_4 = 5 \\
& x_1+\ x_2+x_3 \qquad = 1 \\
& x_3+\ x_4 \leqq 2 \\
& x_2, x_3 \geqq 0.
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

一般に，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ が実数であるとき，

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

で定義される実数変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の関数 f は **1 次関数**（linear function）と呼ばれる．f が 1 次関数で，b が実数であるとき，方程式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=b$$

は **1 次方程式**（linear equation）と呼ばれ，不等式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqq b,$$
$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqq b$$

は **1 次不等式**（linear inequality）と呼ばれる．1 次方程式と 1 次不等式のどちらも **1 次制約**（linear constraint）といわれる．そして**線形計画問題**（linear programming problem）とは，有限個の 1 次制約のもとで一つの 1 次関数を最大化（または最小化）する問題である．通常，異なる制約に異なる添字 i を付け，異なる変数に異なる添字 j を付ける．説明を簡単にするために，第 1－7 章では次の形式の LP 問題だけを考えよう：

$$
\begin{aligned}
\text{最大化：}\quad & \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
\text{制約：}\quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i \quad (i=1, 2, \cdots, m) \\
& x_j \geqq 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n).
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

この形の問題は**標準形**（standard form）の LP 問題といわれる．（読者は，この用語が統一されたものではないことに注意されたい，**正準**（canonical）形や**対称**（symmetric）形という用語を使ったり，これらの形容詞をまったく別の意味で使う著者もいる.）たとえば，（1．5）は標準形の問題である（ただし，$n=3, m=3, a_{11}=2, a_{12}=3$, 等）．標準形の問題を他と区別する特徴は何であろうか？ まず，制約がすべて 1 次**不等式**である．第 2 に，（1．7）における $m+n$ 個の制約のうち最後の n 個が特別な形をしている．それらは n 個のどの変数も負の値をとってはいけないという単純な条件である．このような制約は**非負制約**（nonnegativity constraint）と呼ばれる．（問題（1．6）は二つの点で標準形と異なることに注意しよう：制約のうち二つは 1 次方程式であり，変数 x_1, x_4 は負の値をとってもよい.）

LP 問題で最大化または最小化すべき 1 次関数は，その問題の**目的関数**（objective function）と呼ばれる．たとえば，次式で定義される変数 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ の関数 z

$$z(x_1, x_2, \cdots, x_6)=3x_1+24x_2+13x_3+9x_4+20x_5+19x_6$$

はポリーの栄養の問題（1．4）の目的関数である．LP 問題のすべての制約を満たす一組の数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は，その問題の**可能解**(*)（feasible solution）といわれる．たとえば，前に確かめたように，

$$x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=8, x_5=2, x_6=0$$

は（1．4）の可能解である．最後に，目的関数を最大化（問題によっては，最小化）する可能解は**最適解**（optimal solution）と呼ばれる．それに対応する目的関数の値はその問題の**最適値**（optimal value）と呼ばれる．後でわかるように，（1．4）のただ一つの最適解は，

$$x_1=4, x_2=0, x_3=0, x_4=4.5, x_5=2, x_6=0.$$

または，簡略化して書けば，(4, 0, 0, 4.5, 2, 0) である．したがって，（1．4）

(*)（訳注）実行可能解と呼ばれることも多い．

の最適値は 92.5 である．あらゆる LP 問題がただ一つの最適解をもつとは限らない．多数の異なる最適解をもつ問題もあれば，最適解をもたない問題もある．後者はまったく違う二つの理由から起る：可能解が一つも存在しないためか，またはある意味であまりに多数の可能解が存在するためかのどちらかである．最初の場合は，可能解を一つももたない問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化：} & 3x_1 - x_2 \\ \text{制約：} & x_1 + x_2 \leqq 2 \\ & -2x_1 - 2x_2 \leqq -10 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{array} \qquad (1.8)$$

によって例示される．そのような問題は**可能でない**(*) (infeasible) といわれる．他方，問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化：} & x_1 - x_2 \\ \text{制約：} & -2x_1 + x_2 \leqq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leqq -2 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{array} \qquad (1.9)$$

は可能解をもつけれども，そのどれも最適解ではない：実際，あらゆる数 M に対し，$x_1 - x_2 > M$ となるような可能解 x_1, x_2 が存在する．ある意味で，(1.9) はあまりに多数の可能解をもつために，それらはどれも最適ではない．このような性質をもつ問題は**有界でない** (unbounded) といわれる．後に（定理 3.4 で）証明するように，あらゆる線形計画問題はここで述べた 3 種類の中の一つに属する：それは最適解をもつか，可能でないか，または有界でないかのどれかである．

線形計画法の歴史

様々な数学の分野の中でも，線形計画法は大変若い．それは，G. B. Dantzig が線形計画問題の形に定式化されたアメリカ空軍のある計画問題を解くために“シンプレックス法(*)”を考案した 1947 年に始まる．それに続いたのが，この新分野での急速な発展を伴った目覚ましい期間である．生産管理における非常に広範囲の見かけ上は無関係な問題が線形計画法によって記述でき，なによりも重要なことには，シンプレックス法によって解くことができるという事実がすぐに明らかになった．このような問題は，それと認識された場合でも，伝統的に経験と直観だけを頼りにした試行錯誤によって取り組まれていた．線形計画法を使うことによって，全体的な運用の効率がしばしば飛躍的に向上した．（それまでは，効率の壁は通常技術革新によって打破されてきた．組織化と計画の改善による――**現存する技術的条件のもとでの**――この新しい効率向上の方法は，数学の現実的有用性に対して多くの管理者の目を開かせた．少なくとも，それは意思決定問題を明確できちんと定義された言葉で記述することの利点を彼らにさとらせた．）線形計画法の理論が多くの人々に知られるようになるとともに，新しい領域で多くの思いもかけない応用がなされるようになった．逆に，このような応用が，それが無ければ関心を引き起さなかったかもしれない問題を解く必要性を浮き彫りにすることによって，理論的な研究の推進に拍車をかけた．理論と応用のこのすばらしい共演によって，応用数学の新しい分野が確立された．

17 世紀に力学の問題を解く必要性から解析学が発展したように，20 世紀には経営上の問題を解く必要性から線形計画法が発展した．この新しい分野は誕生したときからもっと別の影響も深く受けて進化してきた．経済学がその一つである．1874 年に L. Walras が提案した有名な体系のような，古典経済学理論を分析するためのすばらしい枠組みが線形計画法によって与えられることを，すでに 1947 年に T. C. Koopmans が指摘し始めている．他方，線形計画法は，凸(とつ)集合の幾何学，組合せ的な極値問題，2 人ゲームの理論のような幅広い話題に関する既知の純粋数学の定理を互いに結びつける役割を果した．最後に，線形計画法が現代のコンピュータ技術と同時に発展したのは幸運であったし，おそらく避けられないことでもあった：電子計算機が無ければ，今日のような大規模な線形計画問題は考えられないであろう．

科学的な分野が一朝一夕にして生まれることはめったにない．後から考えてみ

(*)（訳注）実行不能ということも多い．

(*)（訳注）単位法と訳されることも多い．

ると，決定的な突破口に到る道を準備した源を突き止められることが多い．線形計画法の分野も例外ではない．その数学的な理論の核に当るものは，連立1次不等式の研究である．これは1826年のFourierの研究にまでさかのぼることができる．それ以来この主題を扱った数学者はごく少数で，誰もシンプレックス法に匹敵する効率をもったアルゴリズムを考案しなかった．しかし，彼らの中に，線形計画法の**双対定理**と今日呼ばれている基本定理のいくつかの特殊な場合を証明した人がいた．応用に関しては，L. V. Kantrovichがある限定されたLP問題の実用的な重要性を指摘し，それらの問題を解く初等的なアルゴリズムを早くも1939年に提案した．残念なことにその努力は，線形計画法がDantzig達による独立した業績によって優美な理論となった後も，長くソ連では顧みられず外に知られないままであった．

1970年代に，線形計画法は2度広く世の注目を浴びることになった．1975年10月14日に，スウェーデン王立科学アカデミーは，L. V. KantrovichとT. C. Koopmansに"最適資源割当ての理論への貢献に対し"ノーベル経済学賞を授与した．(読者も御存知のように，数学にノーベル賞はない．おそらく，このアカデミーは，線形計画法の父として広く認められているG. B. Dantzigの業績をあまりに数学的すぎるとみなしたのであろう．) 第2の出来事はもっと劇的なものであった．シンプレックス法が発明されて以来，数学者達はLP問題を解く上で**理論的に**満足なアルゴリズムを捜し求めていた．(簡単な説明を付け加えよう：アルゴリズムの効率を判定する理論的な基準は実際的な基準とはまったく異なる．したがって，実際への応用において大変役に立つシンプレックス法のようなアルゴリズムが，理論的には不満足であるということもありうる．逆もまた真である：理論的に満足なアルゴリズムが実際にはまったく役に立たないということもある．この区別は第4章でもう一度取り上げよう．) 1979年にこの事態が打開され，L. G. Khachianが(ShorやJudin and Nemirovskiiの以前の仕事に基づいて)そのようなアルゴリズムを記述した論文を発表した．世界中の新聞がこの結果を報道したが，その中にはお祭騒ぎのような誤解に満ちた記事も見られた．本書ではこのアルゴリズムを付録(*)で述べる．

(*)下巻参照．

線形計画法の歴史の詳細な展望については，Dantzigの著書(1963)の第2章を参照されたい．線形計画法の多数の応用に関する文献リストはRiley and Gass(1958)にある．より最近の応用についてはGass (1975) を見よ．

問 題

△印を付した問題の解答は本書の末尾にある．

1.1 次の中で標準形の問題はどれか？

a．最大化： $3x_1-5x_2$

制約： $4x_1+5x_2\geqq 3$

$6x_1-6x_2=7$

$x_1+8x_2\leqq 20$

$x_1, x_2\geqq 0.$

b．最小化： $3x_1+x_2+4x_3+x_4+5x_5$

制約： $9x_1+2x_2+6x_3+5x_4+3x_5\leqq 5$

$8x_1+9x_2+7x_3+9x_4+3x_5\leqq 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4\geqq 0.$

c．最大化： $8x_1-4x_2$

制約： $3x_1+x_2\leqq 7$

$9x_1+5x_2\leqq -2$

$x_1, x_2\geqq 0.$

1.2 標準形にせよ：

最小化： $-8x_1+9x_2+2x_3-6x_4-5x_5$

制約： $6x_1+6x_2-10x_3+2x_4-8x_5\geqq 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\geqq 0.$

1.3 問題(1.8)は可能でなく，問題(1.9)は有界でないことを証明

せよ．

△**1．4**　LP問題

$$\text{最大化：}\quad x_1+x_2$$
$$\text{制約：}\quad sx_1+tx_2\leqq 1$$
$$x_1, x_2\geqq 0$$

が

a．最適解をもつ

b．可能でない

c．有界でない

ための数 s，t に対する必要十分条件を求めよ．

△**1．5**　次の命題が正しければ証明し，誤りであれば反証を示せ：問題（1．7）が有界でなければ，次の問題が有界でないような添字 k が存在する．

$$\text{最大化：}\quad x_k$$
$$\text{制約：}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqq b_i\quad (i=1, 2, \cdots, m)$$
$$x_j\geqq 0\quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

△**1．6**　〔Greene et al.（1959）より〕ある肉詰製造工場では，毎日豚肉をもも肉 480 単位，腹肉 400 単位，肩肉 230 単位生産している．これらのどの製品もそれぞれ生肉または燻製として売られる．1 日の規定労働時間内に燻製にできるもも肉，腹肉，肩肉の総量は 420 単位である．さらに，規定時間外に 250 単位を超過費用のもとで燻製にすることができる．単位量当りの純益は次のとおりである：

	生肉（ドル）	規定時間内燻製（ドル）	規定時間外燻製（ドル）
もも肉	8	14	11
腹肉	4	12	7
肩肉	4	13	9

たとえば，次の生産計画では総純益が 9,965 ドルになる．

	生肉	燻製	燻製（規定時間外）
もも肉	165	280	35
腹肉	295	70	35
肩肉	55	70	105

目標は，総純益を最大にする生産計画を求めることである．これを標準形の LP 問題として定式化せよ．

1．7　〔Charnes et al.（1952）より〕ある石油精製所はアルキラート，分解ガソリン，直留ガソリン，イソペンタンの 4 種類のガソリンを生産している．各ガソリンの二つの重要な性質は，（アンチノック性を表す）性能指数ＰＮと（揮発性を表す）蒸気圧 RVP である．これら二つの性質および 1 日当りの生産量（バレル）は次のとおりである：

	ＰＮ	RVP	生産量（バレル）
アルキラート	107	5	3,814
分解ガソリン	93	8	2,666
直留ガソリン	87	4	4,016
インペンタン	108	21	1,300

これらのガソリンは単独でバレル当り 4.83 ドルでも売れるし，混合して航空ガソリン（航空ガソリンＡ，航空ガソリンＢ）としても売れる．これらの航空ガソリンには一定の品質が要求される．その条件と売価は次のとおりである：

	ＰＮ	RVP	バレル当り売価（ドル）
航空ガソリンＡ	100 以上	7 以下	6.45
航空ガソリンＢ	91 以上	7 以下	5.91

混合ガソリンの PN と RVP の値は，それぞれその各成分ガソリンの PN と RVP の値の重みつき平均である．たとえば，精油所は次の戦略を採用

することができる：

○ 2,666 バレルのアルキラートと 2,666 バレルの分解ガソリンを混合して，次の性質をもつ航空ガソリンAを 5,332 バレル生産する．

$$\mathrm{PN}=\frac{(2{,}666\times107)+(2{,}666\times93)}{5{,}332}=100$$

$$\mathrm{RVP}=\frac{(2{,}666\times5)+(2{,}666\times8)}{5{,}332}=6.5$$

○ 1,148 バレルのアルキラートと 4,016 バレルの直留ガソリンと 1,024 バレルのイソペンタンを混合して，次の性質をもつ航空ガソリンBを 6,188 バレル生産する．

$$\mathrm{PN}=\frac{(1{,}148\times107)+(4{,}016\times87)+(1{,}024\times108)}{6{,}188}\fallingdotseq94.2$$

$$\mathrm{RVP}=\frac{(1{,}148\times5)+(4{,}016\times4)+(1{,}024\times21)}{6{,}188}\fallingdotseq7.$$

○ 276 バレルのイソペンタンを売る．

以上の計画では，総利益が次のようになる．

$$(5{,}332\times6.45)+(6{,}188\times5.91)+(276\times4.83)\fallingdotseq72{,}296\quad(\text{ドル}).$$

精油所は可能な最大の利益をもたらす計画を目標としている．これを標準形の LP 問題として定式化せよ．

1.8　ある電子機器製造会社が，4 週間以内に 20,000 台のラジオを引き渡すという契約をした．顧客は，引き渡されるラジオ 1 台につき，第 1 週の末日までの分は 20 ドル，第 2 週の末日までの分は 18 ドル，第 3 週の末日までの分は 16 ドル，第 4 週の末日までの分は 14 ドルを支払う．各作業員は 1 週当り 50 台しかラジオを組み立てることができないので，会社は現在の労働力 40 人ではこの顧客の注文に応じられない．そこで，会社は新しく人を雇い，彼らを訓練して急場の助けにしなければならない．どの熟練作業員も組立ラインから解放して，3 人の新人の訓練に当らせることができる．1 週間の訓練の後に，訓練生は組立ラインの作業に従事することも，また，別の新人の訓練に当ることもできるようになる．

現在，この会社は他の契約をまったくもたない．その結果，すべての製品の引渡しが完了した時点で，何人かの作業員の仕事がなくなる．定職者も一時雇用者も，すべての作業員がこの 4 週間を通じて賃金の支給を受ける．作業員の週給は，その仕事が組立でも，新人の訓練でも，また，仕事がないときでも 200 ドルである．訓練生の週給は 100 ドルである．作業員の賃金を除いて，生産費用はラジオ 1 台当り 5 ドルである．

たとえば，会社は次のような計画を立てることができる．

第 1 週：10 人の組立工，30 人の指導員，90 人の訓練生．

作業員の賃金：	8,000 ドル
訓練生の賃金：	9,000 ドル
500 台の収益：	7,500 ドル
純損　　：	9,500 ドル

第 2 週：120 人の組立工，10 人の指導員，30 人の訓練生．

作業員の賃金：	26,000 ドル
訓練生の賃金：	3,000 ドル
6,000台の収益：	78,000 ドル
純益　　：	49,000 ドル

第 3 週：160 人の組立工．

作業員の賃金：	32,000 ドル
8,000台の収益：	88,000 ドル
純益　　：	56,000 ドル

第 4 週：110 人の組立工，50 人遊休．

作業員の賃金：	32,000 ドル
5,500台の収益：	49,500 ドル
純益　　：	17,500 ドル

以上の 113,000 ドルの総純益をあげる計画は，多くの可能な計画の一例にすぎない．会社の目標は総純益を最大にすることである．これを LP 問題として定式化せよ（必ずしも標準形でなくてよい）．

△１．９ 〔S. Masuda (1970) より．V. Chvátal (1983) もみよ.〕**自転車問題**では，10マイルの距離を旅するn人の人が1台の一人乗り自転車を乗り継いでいく．データとして，各人の徒歩での速さw_jと自転車に乗ったときの速さb_jが与えられている$(j=1,2,\cdots,n)$．問題は，最後の人が到着するまでの所要時間を最小化することである．($n=3$, $w_1=4$, $w_2=w_3=2$, $b_1=16$, $b_2=b_3=12$の場合は解けるか？）次の LP 問題の最適値は自転車問題の最適値に対する下界を与えることを示せ．

$$
\begin{aligned}
\text{最小化：}\quad & t \\
\text{制約：}\quad & t-x_j-x_j'-y_j-y_j' \geqq 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \\
& t \quad -\sum_{j=1}^{n} y_j-\sum_{j=1}^{n} y_j' \geqq 0 \\
& w_jx_j-w_jx_j'+b_jy_j-b_jy_j'=10 \quad (j=1,2,\cdots,n) \\
& \sum_{j=1}^{n} b_jy_j-\sum_{j=1}^{n} b_jy_j' \leqq 10 \\
& x_j, x_j', y_j, y_j' \geqq 0 \quad (j=1,2,\cdots,n).
\end{aligned}
$$

2

シンプレックス法の働き

本章では，標準形の LP 問題をシンプレックス法で解くことを学ぶ．この方法の詳細についての厳密な分析は第3章で述べる．

第1の例

次の例を用いてシンプレックス法を説明しよう：

$$
\begin{aligned}
\text{最大化：}\quad & 5x_1+4x_2+3x_3 \\
\text{制約：}\quad & 2x_1+3x_2+\ x_3 \leqq 5 \\
& 4x_1+\ x_2+2x_3 \leqq 11 \\
& 3x_1+4x_2+2x_3 \leqq 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqq 0.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

この方法の予備段階として，スラック変数と呼ばれるものを導入する．この概念の動機を与えるために制約の第1行を考えよう：

$$2x_1+3x_2+x_3 \leqq 5. \tag{2.2}$$

すべての可能解x_1, x_2, x_3に対して，(２．１)の左辺の値は右辺の値以下である．これら両辺の値の間に余裕（スラック）が生ずることが多い．この余裕をx_4で表そう．つまり，$x_4=5-2x_1-3x_2-x_3$と**定義する**．この記号を用いれば，不等式（２．２）は$x_4 \geqq 0$と書くことができる．同様に，次の二つの制

約から変数 x_5, x_6 が導かれる．最後に，長年の習慣に従って目的関数 $5x_1+4x_2+3x_3$ を z で表そう．まとめると：数 x_1, x_2, x_3 のあらゆる**選び方**に対し，数 x_4, x_5, x_6, z を次式で**定義する**．

$$\begin{aligned} x_4 &= 5-2x_1-3x_2-x_3 \\ x_5 &= 11-4x_1-x_2-2x_3 \\ x_6 &= 8-3x_1-4x_2-2x_3 \\ z &= 5x_1+4x_2+3x_3. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

この記号を用いれば，我々の問題は次のように述べることができる．

$$\begin{aligned} &\text{最大化：}\quad z \\ &\text{制約：}\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqq 0. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

式（2．3）によって定義された新しい変数 x_4, x_5, x_6 は**スラック変数** (slack variable) と呼ばれる．一方，もとからある変数 x_1, x_2, x_3 はふつう**決定変数** (decision variable) と呼ばれる．ここで肝心なのは，（2．3）が問題（2．1）と問題（2．4）の同等性を明確にしている点に注目することである．より精確には：

- 問題（2．1）のあらゆる可能解 x_1, x_2, x_3 は，（2．3）で定められたただ一通りの方法によって問題（2．4）の可能解 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ に拡張することができる．
- 問題（2．4）のあらゆる可能解 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ からスラック変数を除くだけで，問題（2．1）の可能解 x_1, x_2, x_3 を得ることができる．
- 問題（2．1）の可能解と問題（2．4）の可能解との間のこの対応によって，問題（2．1）の最適解は問題（2．4）の最適解となり，その逆も正しい．

シンプレックス法の基本方針は**逐次改良**である：問題（2．4）のある可能解 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ が求められたら，次のような意味でよりよい他の可能解 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_6$ に向かって進んでいく：

$$5\bar{x}_1+4\bar{x}_2+3\bar{x}_3 > 5x_1+4x_2+3x_3.$$

この過程を有限回繰り返せば，ついには最適解に到達するであろう．

出発に当って，ある可能解 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ が必要である．この例ではそれが

容易に求められる：決定変数 x_1, x_2, x_3 を 0 とおき，（2．3）からスラック変数 x_4, x_5, x_6 の値を決めればよい．このようにして初期可能解

$$x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=5, x_5=11, x_6=8 \qquad (2.5)$$

と，それに対応する $z=0$ を得る．

上に述べた基本方針に従って，より大きな z の値をもたらす可能解を捜さねばならない．そのような解を求めることは難しくない．たとえば，$x_2=x_3=0$ を保ったままで x_1 の値を大きくすれば，$z=5x_1>0$ を得る．そこで，$x_2=x_3=0$ のままで $x_1=1$ とすれば，$z=5$ となる（このとき，$x_4=3, x_5=7, x_6=5$）．さらに，$x_2=x_3=0$ のままで $x_1=2$ とすれば，もっとよい $z=10$ を得る（このとき，$x_4=1, x_5=3, x_6=2$）．しかし $x_2=x_3=0$ のままで $x_1=3$ とするとき，$z=15$ だが，$x_4=x_5=x_6=-1$ となる．解が可能であるためにはすべての i について $x_i \geqq 0$ でなければならないから，これは許されない．要するに x_1 はあまり大きくできないということである．問題は次のようになる：**解の可能性**（$x_4, x_5, x_6 \geqq 0$）**を保ちながら（同時に $x_2=x_3=0$ を保って）x_1 をどれだけ大きくすることができるか？**

条件 $x_4=5-2x_1-3x_2-x_3 \geqq 0$ は $x_1 \leqq \frac{5}{2}$ を意味する．同様に，$x_5 \geqq 0$ から $x_1 \leqq \frac{11}{4}$，$x_6 \geqq 0$ から $x_1 \leqq \frac{8}{3}$ がでる．これらの三つの限界の中で最初のものが最も強い．その限界まで x_1 を増大させることによって，次の解を得る．

$$x_1=\frac{5}{2}, x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=1, x_6=\frac{1}{2}. \qquad (2.6)$$

この解が $z=\frac{25}{2}$ を与え，$z=0$ を実際に改良していることに注意しよう．

次に，解（2．6）よりさらによい可能解を捜さなければならない．しかし，この課題は最初のものよりやや難しそうである．なぜ最初の反復が非常に容易だったのか？　可能解（2．5）だけでなく連立1次方程式（2．3）も自由に使うことができ，それが改良された可能解を得る手がかりを与えた．同様な方法を続けたければ，連立1次方程式（2．3）が解（2．5）に対してもつのと同様な関係を，解（2．6）に対してもつような新しい連立1次方程式を作りださねばならない．

その新しい連立方程式はどのような性質をもつべきだろうか？（2．3）は，（2．5）で値0をとる変数によって，（2．5）で正の値をとる変数を表している．同様に，新しい連立方程式は，（2．6）で値0をもつ変数によって，（2．6）で正の値をもつ変数を表さなければならない：手短かに言えば，x_2, x_3, x_4 によって x_1, x_5, x_6（および z）を表す必要がある．特に，0から正に値を変えた変数 x_1 を，連立方程式の右辺から左辺へ移項しなければならない．同様に，正から0に値を変えた変数 x_4 を左辺から右辺へ移項しなければならない．

新しい連立方程式を作るために，新しく左辺へ移項する変数 x_1 から始めよう．x_1 を x_2, x_3, x_4 によって表す所期の式は（2．3）の第1式から容易に得られる：

$$x_1=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4. \qquad (2.7)$$

次に，x_5, x_6, z を x_2, x_3, x_4 で表すためには，（2．7）を（2．3）の対応する行に代入するだけでよい：

$$\begin{aligned}x_5&=11-4\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\right)-x_2-2x_3\\&=1+5x_2+2x_4\\x_6&=8-3\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\right)-4x_2-2x_3\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{3}{2}x_4\\z&=5\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\right)+4x_2+3x_3\\&=\frac{25}{2}-\frac{7}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{5}{2}x_4.\end{aligned}$$

結局，新しい方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\\x_5&=1+5x_2\phantom{-\frac{1}{2}x_3}+2x_4\\x_6&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{3}{2}x_4\end{aligned} \qquad (2.8)$$

$$z=\frac{25}{2}-\frac{7}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{5}{2}x_4.$$

最初の反復と同じように，右辺の変数の中から適当に一つ選び，残りの変数は0に保ったままで，その値を大きくすることによって z の値を増大させることを試みよう．x_2 または x_4 の値を大きくすると z は**減少し**，我々の意図に反することに注意しよう．ゆえに，選択の余地はない：値を大きくする右辺の変数は必然的に x_3 となる．x_3 はどれだけ大きくすることができるだろうか？ 答は方程式（2．8）からただちに得られる：$x_2=x_4=0$ として，制約 $x_1\geqq0$ から $x_3\leqq5$ が出て，制約 $x_5\geqq0$ からはどんな条件も出ず，制約 $x_6\geqq0$ から $x_3\leqq1$ が出る．したがって，$x_3=1$ とするのが最良である：新しい解は，

$$x_1=2, x_2=0, x_3=1, x_4=0, x_5=1, x_6=0 \qquad (2.9)$$

となる（z の値が12.5から13に増大したことに注意しよう）．

さきに学んだように，改良された解を得るだけでは十分でない．解（2．9）に対応する連立1次方程式も求める必要がある．この方程式では，正の値をとる変数 x_1, x_3, x_5 が左辺に，値0をとる変数 x_2, x_4, x_6 が右辺に現れる．そのような方程式を作るために，左辺へ移項する変数すなわち x_3 からまた始めよう．（2．8）の第3式より，$x_3=1+x_2+3x_4-2x_6$ を得る：これを（2．8）の他の式の x_3 に代入して，

$$\begin{aligned}x_3&=1+x_2+3x_4-2x_6\\x_1&=2-2x_2-2x_4+x_6\\x_5&=1+5x_2+2x_4\\z&=13-3x_2-x_4-x_6\end{aligned} \qquad (2.10)$$

を得る．

いよいよ第3の反復である．何よりもまず，（2．10）の右辺から目的関数の増大をもたらす変数を選ばなくてはならない．しかし，そのような変数は存在しない：事実，右辺の変数 x_2, x_4, x_6 のどれを大きくしても z を**減少**させるだけである．そこで，我々は停止点に到達したように思われる．実際には，この停止点の存在こそが完了のしるしである．この例題は解かれた．最後の表によって表された解が最適解である．なぜか？ その答は（2．10）の最下行に隠されている：

$$z=13-3x_2-x_4-x_6. \qquad (2.11)$$

最後に得られた解（2．9）は $z=13$ を与える．この解が最適解であることを示すには，あらゆる可能解が不等式 $z\leqq 13$ を満たすことを証明すればよい．すべての可能解 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ は他の関係式とともに不等式 $x_2\geqq 0, x_4\geqq 0, x_6\geqq 0$ を満たすから，（2．11）からただちに所期の不等式 $z\leqq 13$ が得られる．

字　引

一般に，問題

$$\begin{aligned} &\text{最大化：} && \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{制約：} && \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ & && x_j\geqq 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \qquad (2.12)$$

が与えられたとき，まずスラック変数 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ を導入し，目的関数を z と書く．すなわち，次のように定義する．

$$\begin{aligned} x_{n+i} &= b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \end{aligned} \qquad (2.13)$$

シンプレックス法のやり方では，問題（2．12）の各可能解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は，（2．13）で定義された $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ とあわせて，$n+m$ 個の**非負の**数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}$ によって表される．シンプレックス法は，各反復において，ある可能解 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}$ から次のような意味でそれよりよい他の可能解 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{n+m}$ へと移る．

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\bar{x}_j > \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

（実際には，いま述べたことがまったく正しいわけではない：両辺が等しく，狭義の不等式が成立しないことがある．この点をも含む困難な諸問題については第3章で述べる．）

上で見てきたように，各可能解にある連立1次方程式を関連させておくと都合がよい．そのような方程式は改良された可能解を求めることを容易にする．それは，任意に選ばれた右辺の変数の値を，左辺の変数および目的関数の対応する値に翻訳する．J. E. Strum (1972) にならって，このような方程式を**字引**[*] (dictionary) と呼ぼう．ゆえに，問題（2．12）に関連するあらゆる字引は変数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}$ と z の連立1次方程式である．しかし，これらの変数のあらゆる連立1次方程式が字引となるわけではない．まず，$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ と z を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって定義したから，これらの $n+m+1$ 個の変数は深い従属関係をもつ．この相互従属関係は（2．12）に関連するあらゆる字引によってはっきり表されていなくてはならない．翻訳は正しくなくてはならない．より精確には，次のように要請する：

字引を構成する連立1次方程式のあらゆる解と（2．13）の解とは同一でなければならない．　（2．14）

たとえば，数 $x_1, x_2, \cdots, x_6, z$ のあらゆる組に対し，次の3条件は同等である．

○$x_1, x_2, \cdots, x_6, z$ は（2．3）の解である．
○$x_1, x_2, \cdots, x_6, z$ は（2．8）の解である．
○$x_1, x_2, \cdots, x_6, z$ は（2．10）の解である．

そのような意味で，三つの字引（2．3），（2．8），（2．10）は7個の変数の間の相互従属関係について同一の情報を含んでいる．しかし，これらの三つの字引はそれぞれ独自の形で，この情報を表現している．（2．3）の形式では，x_1, x_2, x_3 の数値を自由に変化させ，それに対応する x_4, x_5, x_6, z の値を決めることができる：この字引では，決定変数 x_1, x_2, x_3 が独立変数の役割をはたし，z とスラック変数 x_4, x_5, x_6 はそれらに従属する．字引（2．8）は

[*]（訳註）これはふつう基底形式と呼ばれているものに相当するが，原著のニュアンスを生かすためこのような訳語を使った．

x_2, x_3, x_4 を独立変数，x_1, x_5, x_6, z を従属変数として表す．字引（2.10）では，x_2, x_4, x_6 が独立変数，x_3, x_1, x_5, z が従属変数である．一般には，

あらゆる字引の方程式は，変数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}$ の中の m 個と目的関数 z を残りの n 個の変数によって表現しなければならない．　(2.15)

性質（2.14）と（2.15）によって字引が定義される．これら二つの性質のほかに，字引（2.3），（2.8），（2.10）は次のような性質をもっている：

右辺の変数を 0 として左辺の変数を計算することによって，一つの**可能解**が得られる．

この性質をあわせもった字引は**可能字引**（feasible dictionary）と呼ばれる．したがって，あらゆる可能字引は可能解を表している．しかし，あらゆる可能解が可能字引で表されるとは限らない．たとえば，どの字引も問題（2.1）の可能解 $x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=2, x_5=5, x_6=3$ を表さない．字引によって表される可能解は**可能基底解**（basic feasible solution）と呼ばれる．シンプレックス法の特徴は，もっぱら可能基底解だけを扱い，他のすべての可能解を無視することにある．

第2の例

シンプレックス法の予備学習の締めくくりとして，もう一つの LP 問題にそれを適用してみよう：

$$
\begin{aligned}
\text{最大化：}\quad & 5x_1+5x_2+3x_3 \\
\text{制約：}\quad & x_1+3x_2+x_3 \leqq 3 \\
& -x_1 \qquad +3x_3 \leqq 2 \\
& 2x_1-x_2+2x_3 \leqq 4 \\
& 2x_1+3x_2-x_3 \leqq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqq 0.
\end{aligned}
$$

この場合，初期可能字引は，

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 3-x_1-3x_2-x_3 \\
x_5 &= 2+x_1 \qquad -3x_3 \\
x_6 &= 4-2x_1+x_2-2x_3 \\
x_7 &= 2-2x_1-3x_2+x_3 \\
\hline
z &= \quad 5x_1+5x_2+3x_3
\end{aligned}
\qquad (2.16)
$$

となる．(字引において方程式を書き並べる順序はどうでもよいが，習慣上 z の式を最も下に書き，それを表の残りの式から実線によって分けることにしよう．もちろん，それは最下行の式がそれより上の式の和であるということを意味するものでは**ない**.) この可能字引は可能解

$$x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=3, x_5=2, x_6=4, x_7=2$$

を表す．しかし，このように解を書き下す必要はない：それは字引の中に暗に示されている．

第1反復で，右辺の変数の一つを正にすることによって z の値の増大を図る．このとき，3変数 x_1, x_2, x_3 のどれを選んでもよい．小規模な例題では，z の式において最大の係数をもつ変数を選ぶのがふつうである：このような変数の値を増大させるとき，z の値の増加率は最大である（しかし，必ずしも最大の z の値が達成されるわけではない）．ここでこの規則に従えば，x_1 か x_2 のどちらかを選ぶことになる．任意に選ぶとして，x_1 を正にすることにしよう．x_1 の値が大きくなるとき，x_5 の値も増大する．一方，x_4, x_6, x_7 の値は減少するが，どれも負になることは許されない．x_1 の増大に対して上界を与える三つの制約式 $x_4 \geqq 0, x_6 \geqq 0, x_7 \geqq 0$ のうち，最後の制約式 $x_7 \geqq 0$ が最も強い：それは $x_1 \leqq 1$ を与える．改良された可能解では，$x_1=1, x_7=0$ とおくことになる．新しい解を書き下すかわりに，新しい字引を作ろう．この際，x_1 を右辺から左辺へ移項し，反対に x_7 を左辺から右辺へ移項するということを知っていれば十分である．方程式（2.16）の第4式より，

$$x_1=1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_7 \tag{2.17}$$

が得られる．(2.17) を (2.16) の残りの式に代入して，所期の字引

$$\begin{aligned}
x_1&=1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_7\\
x_4&=2-\frac{3}{2}x_2-\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_7\\
x_5&=3-\frac{3}{2}x_2-\frac{5}{2}x_3-\frac{1}{2}x_7\\
x_6&=2+4x_2-3x_3+x_7\\
\hline
z&=5-\frac{5}{2}x_2+\frac{11}{2}x_3-\frac{5}{2}x_7
\end{aligned} \tag{2.18}$$

を得る．方程式 (2.18) が完成したところでシンプレックス法の第1反復は終了する．

用語について

一つの字引の左辺に現れる変数は**基底変数** (basic variable) と呼ばれる．右辺の変数は**非基底変数** (nonbasic variable) である．それらの基底変数の組は**基底**(basis)といわれる．もちろん，基底は反復のたびに変化していく：たとえば，第1反復で x_1 が基底に入り，x_7 が基底から出た．各反復で，まず基底に入る非基底変数を選び，次にどの基底変数が基底から出なければならないかを見いだす．**入る**変数 (entering variable) は，z の値を増大したいという願いに基づいて選択される．**出る**変数 (leaving variable) は，すべての変数が非負の値をとらねばならないという要請に従って決定される．出る変数は，その非負性が入る変数の増大に対して最も強い上界を与えるような基底変数である．出る変数が現れる式は字引の**ピボット行** (pivot row) と呼ばれ，新しい字引を作る計算過程は**ピボット** (軸) **演算** (pivoting) と呼ばれる．

第2の例 (つづき)

この例では，第2反復で基底に入る変数は明白に x_3 である．それは (2.18) の最下行で正の係数をもつただ一つの非基底変数である．四つの基底変数のうち，x_6 が x_3 の増大に対し最も強い上界を与えるから，それが基底から出なければならない．ピボット演算によって第3番目の字引

$$\begin{aligned}
x_3&=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}x_2+\frac{1}{3}x_7-\frac{1}{3}x_6\\
x_1&=\frac{4}{3}-\frac{5}{6}x_2-\frac{1}{3}x_7-\frac{1}{6}x_6\\
x_4&=1-\frac{7}{2}x_2+\frac{1}{2}x_6\\
x_5&=\frac{4}{3}-\frac{29}{6}x_2-\frac{4}{3}x_7+\frac{5}{6}x_6\\
\hline
z&=\frac{26}{3}+\frac{29}{6}x_2-\frac{2}{3}x_7-\frac{11}{6}x_6
\end{aligned} \tag{2.19}$$

を得る．第3反復では，入る変数は x_2 で，出る変数は x_5 である．ピボット演算の結果，次の字引を得る．

$$\begin{aligned}
x_2&=\frac{8}{29}-\frac{8}{29}x_7+\frac{5}{29}x_6-\frac{6}{29}x_5\\
x_3&=\frac{30}{29}-\frac{1}{29}x_7-\frac{3}{29}x_6-\frac{8}{29}x_5\\
x_1&=\frac{32}{29}-\frac{3}{29}x_7-\frac{9}{29}x_6+\frac{5}{29}x_5\\
x_4&=\frac{1}{29}+\frac{28}{29}x_7-\frac{3}{29}x_6+\frac{21}{29}x_5\\
\hline
z&=10-2x_7-x_6-x_5.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

この時点で，どの非基底変数が基底に入っても z の値を減少させてしまう．すなわち，最後の字引はこの例の最適解を表している．その解は，

$$x_1=\frac{32}{29},\ x_2=\frac{8}{29},\ x_3=\frac{30}{29}$$

で，$z=10$ となる．

細かい注意

最初に字引の定義を注意深く与えておいて，それから（2.18），（2.19），（2.20）を字引と呼んだけれども，事実それらが性質（2.14）をもつことを一々証明しなかったことに気づいた読者がいたかもしれない．この軽率さは次のように正当化することができる．たとえば，連立1次方程式（2.18）を考えよう．方程式（2.18）は（2.16）から算術演算（すなわち，x_1 が入り x_7 が出るピボット演算）によって得られたから，（2.16）のあらゆる解は必ず（2.18）の解となる．（2.16）は（2.18）から x_7 が入り x_1 が出るピボット演算によって得られるから，逆もまた正しい．ゆえに，**（2.18）の解と（2.16）の解は同一である**．同様な議論によって，**（2.19）の解と（2.18）の解が同じであり，（2.20）の解と（2.19）の解が同じである**こともわかる．

もう一つ注意すべき点として，最適解の**存在**に対して**一意性**の問題がある．この問題は我々にとってそれほど大きな関心事ではない．けれども，取扱いが容易なので脇道にそれて議論しよう．取り上げた二つの例のどちらにおいても一つの最適解が得られたが，最適解がただ一つしかないという証拠も十分そろっている．たとえば，第1の例の最後の字引は次のとおりであった．

$$
\begin{array}{l}
x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\
x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\
x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
\hline
z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6.
\end{array}
$$

この最下行は，$z=13$ となるあらゆる可能解が $x_2=x_4=x_6=0$ を満たすということを示している．字引の残りの行から，このような解は $x_3=1, x_2=2, x_5=1$ を満たすことがわかる．すなわち，ただ一つの最適解が存在する．同様な議論は第2の例についても当てはまる．

もちろん，二つ以上の最適解をもつLP問題が存在する．そのような問題をシンプレックス法で解けば，すべての最適解を有効に与えることができる．たとえば，次の字引を考えよう：

$$
\begin{array}{l}
x_4 = 3 + x_2 - 2x_5 + 7x_3 \\
x_1 = 1 - 5x_2 + 6x_5 - 8x_3 \\
x_6 = 4 + 9x_2 + 2x_5 - x_3 \\
\hline
z = 8 \qquad\qquad\quad - x_3.
\end{array}
$$

この最下行は，あらゆる最適解が $x_3=0$ を満たすことを示している（ただし，$x_2=0$ や $x_5=0$ は必ずしも満足しなくてもよい）．そのような解については，字引の残りの行から次式が得られる．

$$
\begin{array}{l}
x_4 = 3 + x_2 - 2x_5 \\
x_1 = 1 - 5x_2 + 6x_5 \\
x_6 = 4 + 9x_2 + 2x_5.
\end{array}
\tag{2・21}
$$

結局，あらゆる最適解は次の条件を満足する x_2, x_5 の値を（2.21）に代入することによって求められる．

$$
\begin{array}{r}
-x_2 + 2x_5 \leqq 3 \\
5x_2 - 6x_5 \leqq 1 \\
-9x_2 - 2x_5 \leqq 4 \\
x_2, x_5 \geqq 0.
\end{array}
$$

（実際には，不等式 $-9x_2-2x_5 \leqq 4$ は明らかに冗長な式である．$x_2 \geqq 0, x_5 \geqq 0$ によってそれは必ず成り立つ．）

以上のシンプレックス法の概略の中で故意に触れなかったいくつかの困難な問題がある．それらについては第3章で論じよう．

タブロー形式

シンプレックス法は上で述べたものとは異なった形式で導入されることが多い．より広く知られている**タブロー形式**（tableau format）の概略を述べるために，本章の第1の例へもどろう．まず，第1字引の方程式をやや異なる形で書き下そ

う：

$$\begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2+\ x_3+x_4 & & = 5 \\ 4x_1+\ x_2+2x_3 \quad +x_5 & & =11 \\ 3x_1+4x_2+2x_3 \qquad +x_6 & & = 8 \\ \hline -z+5x_1+4x_2+3x_3 & & = 0. \end{array}$$

x_i の係数および右辺定数を書きだして，第1**タブロー**を得る．

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & & 11 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & & 8 \\ \hline 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & & 0. \end{array}$$

同様にして，第2字引の方程式

$$\begin{array}{rcl} x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4 & = & \frac{5}{2} \\ -\ 5x_2 \qquad -\ 2x_4+x_5 & = & 1 \\ -\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{3}{2}x_4 \qquad +x_6 & = & \frac{1}{2} \\ \hline -z-\frac{7}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{5}{2}x_4 & = & -\frac{25}{2} \end{array}$$

は第2タブローを与える：

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \frac{5}{2} \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & & -\frac{25}{2}. \end{array}$$

さきに字引に関して導いたピボット演算の規則をタブローの言葉に翻訳することは容易である．次のステップがその手続きを与える．これが正しいことの証明は易

しい．(とにかく我々はタブロー形式を用いないので，この手続きは我々にとって重要ではない．)

ステップ1 最下行の($-z$ の現在の値に等しい右端の数を除いた)すべての数を調べる．もしそれらすべてが負または0ならば，終了する：このとき，そのタブローは最適解を表している．そうでなければ，これらの数の中で最大のものを見つける．それが現れる列は**ピボット列**（pivot column）と呼ばれ，入る変数に対応する．

たとえば，上記の第1タブローのピボット列は第1列である：

$$\begin{array}{|c|cccccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

ステップ2 ピボット列の要素 r が正であるような各行に対し，右端の要素 s を調べる．最小の比 $\frac{s}{r}$ をもつ行は**ピボット行**と呼ばれ，出る変数に対応する．(ピボット列のすべての要素が負または0であるならば，この問題は有界でない．このことについてはさらに第3章で取り扱う．)

いまの例では，ピボット行は第1行である（ここで，$\frac{s}{r}=\frac{5}{2}$）．

$$\begin{array}{|c|cccccc|} \hline 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

ステップ3 ピボット行のあらゆる要素を，ピボット行とピボット列の交差上にある**ピボット数**（pivot number）で割る：

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0.
\end{array}
$$

ステップ4　残りのあらゆる行から，新しいピボット行に適当な数を掛けたものを引く．この演算は，ピボット列における（ピボット数以外の）あらゆる要素を0とするように設計する．すなわち，新しいピボット行に掛ける“適当な数”として，各行のピボット列に現れる要素を選ぶ．（いまの例では，ステップ4の結果として第2タブローが得られる．）

タブローは，すべての変数を左辺に集め，これらの変数を表す記号を省略した字引の暗号的記録にすぎない．本書では，タブローでなく，より明確な字引をかわりに使う．（もちろん，読者がタブローの簡略記法を使って同じ記号 $x_1, x_2, \cdots$ を何度も繰り返し書く手間を省くことは一向に差し支えない．）

警　告

特定のアルゴリズムを記述する方法が二つ以上あることも多い．特に，基本的な概念を明らかにすることを目的とした記述は，計算機による効率的な実現を扱ったものとはまったく異なることがよくある．シンプレックス法も例外ではない．字引は，その基本原理を説明するためには便利な道具を与えるかもしれない．しかし，大規模問題の計算機による解法を実現するときには，計算効率や数値精度を考えることの方がそのような教育的効果よりも重要である．シンプレックス法の効率的実現については，第7，第8章から学習を始める．

問　題

△2.1　次の問題をシンプレックス法で解け：

a．最大化：　$3x_1+2x_2+4x_3$

制約：

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+2x_3 &\leqq 4\\
2x_1 \qquad +3x_3 &\leqq 5\\
2x_1+x_2+3x_3 &\leqq 7\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

b．最大化：　$5x_1+6x_2+9x_3+8x_4$

制約：

$$
\begin{aligned}
x_1+2x_2+3x_3+x_4 &\leqq 5\\
x_1+x_2+2x_3+3x_4 &\leqq 3\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

c．最大化：　$2x_1+x_2$

制約：

$$
\begin{aligned}
2x_1+3x_2 &\leqq 3\\
x_1+5x_2 &\leqq 1\\
2x_1+x_2 &\leqq 4\\
4x_1+x_2 &\leqq 5\\
x_1, x_2 &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

2.2　シンプレックス法を用いて，次の問題のすべての最適解を求めよ：

最大化：　$2x_1+3x_2+5x_3+4x_4$

制約：

$$
\begin{aligned}
x_1+2x_2+3x_3+x_4 &\leqq 5\\
x_1+x_2+2x_3+3x_4 &\leqq 3\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0.
\end{aligned}
$$