3

おとし穴とその対策

シンプレックス法を説明するための前章の例題はわざと円滑に解けるものにしてあった．それらは起りうる危険を示していなかった．本章の目的はシンプレックス法の各ステップを細かく検討することによって厳密な分析を行うことである．

3種類のおとし穴

3種類のおとし穴がシンプレックス法で起りうる．

(i) **初期化**　出発できないかもしれない：どのようにしてはじめの可能字引を手に入れるか？

(ii) **反復**　ある反復で立ち往生するかもしれない：入る変数を選び，出る変数を見いだし，ピボット演算によって次の可能字引を作ることがいつでもできるか？

(iii) **終了**　終了できないかもしれない：シンプレックス法がいつまでも最適解に到達せず，字引の無限系列を作ることがありうるか？

初期化は，前章ではまったく問題にならなかった．問題

最大化：　$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\text{制約：}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i \quad (i=1, 2, \cdots, m) \qquad (3.1)$$

$$x_j \geqq 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

が与えられたとき，単にスラック変数と目的関数を定義する式を書き下すことによって初期可能字引

$$\begin{array}{l} x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i=1, 2, \cdots, m) \\ \hline z \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{array}$$

を作った．一般に，この字引が可能であるための必要十分条件は，問題（3．1）の各右辺定数 b_i が非負であることである．このことは，

$$x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$$

が（3．1）の可能解であることと同等である．値0の組は“原点”と呼ばれることがあるので，各右辺の定数 b_i が非負であるような問題（3．1）は**可能原点** (feasible origin) をもつ問題といわれる．今の所は初期化のおとし穴にはふれないことにする：すなわち，可能原点をもつ問題に注意を限定しよう．可能でない原点をもつ問題は49-53頁で議論する．

反　復

ある可能字引が与えられたとき，入る変数を選び，出る変数を見いだし，ピボット演算によって次の可能字引を作らねばならない．

入る変数を選ぶ　　入る変数は，**現在の字引の最下行で正の係数** $\bar{c}_j$ **をもつ非基底変数** x_j である．この規則は基底に入る候補を二つ以上与えるかもしれないし，一つも与えないかもしれないという意味であいまいである．後者は現在の字引が最適解を表すことを意味するので，その時点でこの方法は終了してよい．より精確に述べるために，現在の字引の最下行

$$z = z^* + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j$$

を考えよう．ここで，Nは非基底変数 x_j の添字 j の集合を表す．$j \in N$ に対

して $x_j=0$ とする現在の解は，目的関数の値として z^* を与える．もし $j\in N$ のとき $\bar{c}_j\leqq 0$ ならば，$j\in N$ に対して $x_j\geqq 0$ であるようなすべての可能解の目的関数は z^* を越えない．ゆえに，現在の解が最適である．他方，基底に入る候補が二つ以上あるならば，どの候補を使ってもよい．(小規模な問題を解くための手計算では，最大の係数 $\bar{c}_j$ をもつ候補 x_j を選ぶのが習慣である．しかし，シンプレックス法を計算機上で実現するときはたいていこのやり方はとらない．このことについてはさらに第7章で述べる．)

出る変数を見つける　出る変数は，**基底変数の中で，その非負制約が入る変数の増大に対する最も強い上界を課すもの**である．今度も，この規則は基底から出る候補を二つ以上与えるかもしれないし，一つも与えないかもしれないという意味であいまいである．後者の例は次の字引によって示される．

$$
\begin{array}{l}
x_2=5+2x_3-\ x_4-3x_1\\
x_5=7\qquad\quad -3x_4-4x_1\\
\hline
z\ =5+\ x_3-\ x_4-\ x_1.
\end{array}
$$

入る変数は x_3 であるが，二つの基底変数 x_2, x_5 のどちらも x_3 の増大に対する上界を課さない．ゆえに，$(x_1=x_4=0$ のままで$)x_3$ をいくら大きくしても解の可能性が保たれる：任意の正数 t に対し $x_3=t$ とおけば，可能解 $x_1=0$, $x_2=5+2t$, $x_4=0$, $x_5=7$ が得られ，$z=5+t$ となる．t は任意に大きくすることができるから，z も任意に大きくすることができる．この問題は**有界でない**という結論に達する：実際，あらゆる数 M に対して，$x_3-x_4-x_1>M$ となるような可能解 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ が存在する．この結論は一般化できる：もし基底から出る候補が存在しないならば，入る変数の値を，したがってまた目的関数の値を望む限りいくらでも大きくすることができる．この場合，その問題は有界でない．他方，基底を出る候補が二つ以上あるならば，どれを使ってもよい．入る変数と出る変数が選ばれれば，ピボット演算は簡単である．

退　化　基底を出る候補が二つ以上あるとき，その結果おもしろいことが起る．例として，字引

$$
\begin{array}{l}
x_4=1\qquad\qquad\quad -2x_3\\
x_5=3-2x_1+4x_2-6x_3\\
x_6=2+\ x_1-3x_2-4x_3\\
\hline
z\ =\qquad 2x_1-\ x_2+8x_3
\end{array}
$$

を考えよう．x_3 を基底に入れるように選ぶと，三つの基底変数 x_4, x_5, x_6 のどれもが x_3 の増大を $\dfrac{1}{2}$ に制限することがわかる．ゆえに，これらの3変数のどれもが基底から出る候補になる．x_4 を選んだとしよう．いつもと同様にピボット演算を行って，字引

$$
\begin{array}{l}
x_3=0.5\qquad\qquad\qquad -0.5x_4\\
x_5=\qquad -2x_1+4x_2+\ 3x_4\\
x_6=\qquad\qquad x_1-3x_2+\ 2x_4\\
\hline
z\ =\ 4+2x_1-\ x_2-\ 4x_4
\end{array}
$$

を得る．この字引は，今まで出会った字引と一つの重要な点で異なっている：これに対応する解では，非基底変数とともに基底変数 x_5, x_6 の値も0となる．一つ以上の基底変数が0となる基底解は**退化している** (degenerate) といわれる．

退化は，それ自体は無害であるけれども，厄介な副作用をもつことがある．これをいまの例の次の反復で説明しよう．そこでは x_1 が基底に入り，x_5 が基底から出る．退化によって，制約 $x_5\geqq 0$ が x_1 の増大を **0** に制限する．ゆえに，x_1 の値は変化せず，残りの変数と目的関数 z の値も変わらない．これは困ったことである．シンプレックス法の隠された動機として，反復ごとに z の値を増大させたいという要求があった．この特別な反復では，その要求が満足されない：ピボット演算は字引を

$$
\begin{array}{l}
x_1=\qquad 2x_2+1.5x_4-0.5x_5\\
x_3=0.5\qquad\quad -0.5x_4\\
x_6=\qquad -x_2+3.5x_4-0.5x_5\\
\hline
z\ =\ 4+3x_2-\quad x_4-\quad x_5
\end{array}
$$

に変えるが，対応する解にはまったく影響しない．基底解を変化させないシンプレックス反復は**退化している**といわれる．(読者も確認できるように，次の反復も退化しているが，さらにその次の反復は退化せず最適解をもたらす．)

ある意味で，退化は偶発事件のようなものである：ある基底変数が0になることがあるのは，一連のピボット演算の結果がたまたま互いに打ち消し合うときに限られる．けれども，退化は実際の応用から生ずるLP問題の中に多く現れる．このような問題のほとんどすべてにおいて，シンプレックス法のある段階で退化した基底解が生ずるといわれてきた．それが起ると，シンプレックス法は短い（ときにはきわめて短い）退化した反復の列をたどることにより停滞することがある．ふつうは，そのような一連の退化した反復は退化していない反復によって突破される．例外を次に述べる．

終了：循環

シンプレックス法でいつまでも最適解が求められず，反復の無限系列をたどることがあるだろうか？　まさに，それは起りうる．この主張が正しいことを示すために，初期字引

$$\begin{array}{l}
x_5 = -0.5x_1 + 5.5x_2 + 2.5x_3 - 9x_4 \\
x_6 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_4 \\
x_7 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4
\end{array}$$

を考えて，次のように約束しよう：

(i)　字引のz行において最大の係数をもつ非基底変数をつねに入る変数とする．

(ii)　基底から出るための条件を満たす基底変数が二つ以上あるときは，最小の添字をもつ候補を基底から出る変数とする．

このとき，最初の6回の反復で作りだされる字引の列は次のようになる．

第1反復：

$$\begin{array}{l}
x_1 = 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5 \\
x_6 = -4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 \\
x_7 = 1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 + 2x_5 \\
\hline
z = 53x_2 + 41x_3 - 204x_4 - 20x_5.
\end{array}$$

第2反復：

$$\begin{array}{l}
x_2 = -0.5x_3 + 2x_4 + 0.25x_5 - 0.25x_6 \\
x_1 = -0.5x_3 + 4x_4 + 0.75x_5 - 2.75x_6 \\
x_7 = 1 + 0.5x_3 - 4x_4 - 0.75x_5 + 2.75x_6 \\
\hline
z = 14.5x_3 - 98x_4 - 6.75x_5 - 13.25x_6.
\end{array}$$

第3反復：

$$\begin{array}{l}
x_3 = 8x_4 + 1.5x_5 - 5.5x_6 - 2x_1 \\
x_2 = -2x_4 - 0.5x_5 + 2.5x_6 + x_1 \\
x_7 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 18x_4 + 15x_5 - 93x_6 - 29x_1
\end{array}$$

第4反復：

$$\begin{array}{l}
x_4 = -0.25x_5 + 1.25x_6 + 0.5x_1 - 0.5x_2 \\
x_3 = -0.5x_5 + 4.5x_6 + 2x_1 - 4x_2 \\
x_7 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 10.5x_5 - 70.5x_6 - 20x_1 - 9x_2.
\end{array}$$

第5反復：

$$\begin{array}{l}
x_5 = 9x_6 + 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 \\
x_4 = -x_6 - 0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \\
x_7 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 24x_6 + 22x_1 - 93x_2 - 21x_3.
\end{array}$$

第６反復：

$$
\begin{aligned}
x_6 &= -0.5x_1+1.5x_2+0.5x_3-\ \ x_4\\
x_5 &= -0.5x_1+5.5x_2+2.5x_3-9x_4\\
x_7 &= 1-\ \ \ x_1\\
\hline
z &= 10x_1-\quad 57x_2-\ 9x_3-24x_4.
\end{aligned}
$$

６回の反復後に作られた字引は初期字引と同一であるから，この方法は同じ６回の反復を何度もたどり，いつまでも最適解（後で示すように，それは最適値 $z=1$ をもつ）に達することはない．この現象は循環として知られている．より精確には，一つの字引が二つの異なる反復において現れる（そして，この字引からそれ自身に到る反復の系列が何度も繰り返されて終りがない）とき，シンプレックス法は**循環する** (cycle) という．循環は退化しているときにだけ起りうることに注意しよう：目的関数の値は退化していない反復ごとに増大し，退化した反復では変化しないから，ある字引からそれ自身に到る反復の系列はすべて退化していなければならない．循環は，シンプレックス法が終了できない一つの理由である．次の定理はそれが唯一の理由であることを示している．

> **定理　３．１**　シンプレックス法が終了できないならば，それは循環する．

証明　まず，$n+m$ 個の全変数から m 個の基底変数を選びだす方法が有限個しかないことに注意しよう．ゆえに，もしシンプレックス法が終了できないならば，ある基底が二つの異なる反復に現れなければならない．あとは，同じ基底をもつどの二つの字引も同一でなければならないということを証明すればよい．（この事実は，第７章で示すように，字引を行列によって表せばただちに明らかになる．しかし，易しい証明を最初から与えることができるので，それをここで示そう．）同じ基底変数 x_i の集合（$i\in B$）をもつ二つの字引，

$$
\begin{aligned}
x_i &= b_i-\sum_{j\notin B} a_{ij}x_j \quad (i\in B)\\
\hline
z &= v+\sum_{j\notin B} c_jx_j
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

と

$$
\begin{aligned}
x_i &= b_i^*-\sum_{j\notin B} a_{ij}^*x_j \quad (i\in B)\\
\hline
z &= v^*+\sum_{j\notin B} c_j^*x_j
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

を考えよう．（３．２）のすべての解 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}, z$ と（３．３）の解が同一であるという性質によって字引が定義された．特に，x_k が非基底変数で t がある数のとき，

$$
\begin{aligned}
&x_k=t,\ x_j=0 \quad (j\notin B \text{ かつ } j\neq k),\\
&x_i=b_i-a_{ik}t \quad (i\in B),\ z=v+c_kt
\end{aligned}
$$

は（３．２）の解となり，（３．３）を満たさなくてはならない．ゆえに，次式が成り立つ．

$$
b_i-a_{ik}t=b_i^*-a_{ik}^*t \ \ (i\in B) \quad \text{かつ} \quad v+c_kt=v^*+c_k^*t.
$$

これらの等式はすべての数 t に対して成り立たなければならないから，

$$
b_i=b_i^*,\ a_{ik}=a_{ik}^* \ (i\in B) \quad \text{かつ} \quad v=v^*,\ c_k=c_k^*.
$$

となる．x_k は任意の非基底変数であったから，これら二つの字引は同一である．■

循環はめったに起らない現象である．実際，シンプレックス法が循環するようなLP問題を作ることは難しい．〔上の例は K. T. Marshall and J. W. Suurballe (1969) からとった．この規模での初めての例は E. M. L. Beale (1955) によって作られ，そもそも最初の例は A. J. Hoffman (1953) によって作られた．なお，Marshall and Suurballe (1969) は，最適解をもつ問題においてシンプレックス法が最適解から離れた所で循環するならば，字引は６個以上の変数と３個以上の方程式を含んでいなければならないということを証明した．〕P. Wolfe (1963) と T. C. T. Kotiah and D. I. Steinberg (1978)

は，(それぞれ 25 回と 18 回の反復で)循環を起した実際の問題に遭遇したことを報告しているが，そのような報告は珍しい．このような理由で，循環がごくまれにではあるが起るかもしれないという心配は，シンプレックス法を計算機上で実現するときたいてい無視されている．

循環の発生を完全に防止する方法がある．古典的な**摂動法と辞書式法**は，各反復において出る変数を賢明に選ぶことによって循環を避ける．より最近の**最小添字規則**は，入る変数と出る変数の**両方**の簡単な選択によって循環を避ける．前者の方法は基底に入る変数の候補を選択する自由をもっているが，出る変数を選ぶのに余分な計算が必要である．後者の方法では余分な手間はまったく必要ないが，入る変数の選択の多様性を放棄してしまう．以下に，両者の詳細について説明しよう．

摂動法と辞書式法　摂動法と辞書式法とは互いに密接に関連している．摂動法は A. Orden によって最初に示唆され，それと独立に A. Charnes (1952) によって展開された方法で，G. B. Dantzig, A. Orden and P. Wolfe (1955) の辞書式法に対する直観的な動機づけを与えてくれる．辞書式法は摂動法の一つの実現とみることができる．

摂動法は，退化を抑止すれば循環は抑止できるし，退化そのものは偶発的なものだという観察を出発点としている．この第 2 の観察を詳しく論ずるために，退化した字引を考えよう．現在の値が 0 の基底変数は，もし初期の右辺 b_i が少しだけ変化していたならば，0 でない小さな値をとる可能性が非常に高いであろう．また，これらの変化が真に微小であれば，実際上のすべての目的に対しては，その問題は変更されなかったものとみなすことができるであろう．このような観察を利用する一つの方法は各 b_i に小さな正数 ε を加え，その結果得られた問題にシンプレックス法を適用することである．この技巧は，($\varepsilon=10^{-6}$ などと選んで) シンプレックス法のいくつかの実現において実際に使われている．それは退化した反復の数を減らすのに役立つ．けれども，それは循環を防止するための安全装置として信頼できるものではない：たとえば，シンプレックス法を問題

最大化：　$10x_1-57x_2-9x_3-24x_4+100x_5$

制約：

$$
\begin{aligned}
&& x_5 &\leq 1+\varepsilon\\
0.5x_1-5.5x_2-2.5x_3+9x_4+ && x_5 &\leq 1+\varepsilon\\
0.5x_1-1.5x_2-0.5x_3+x_4+ && x_5 &\leq 1+\varepsilon\\
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + && x_5 &\leq 2+\varepsilon\\
&& x_1, x_2, \cdots, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

に適用すると，退化した字引

$$
\begin{aligned}
x_5 &= 1+\varepsilon - x_6\\
x_7 &= -0.5x_1+5.5x_2+2.5x_3-9x_4+x_6\\
x_8 &= -0.5x_1+1.5x_2+0.5x_3-x_4+x_6\\
x_9 &= 1-x_1+x_6\\
\hline
z &= 100+100\varepsilon+10x_1-57x_2-9x_3-24x_4-100x_6
\end{aligned}
$$

が第 1 反復で得られ，読者が確かめることができるように，シンプレックス法は次の 6 回の反復において循環する．(その循環は本質的に前の例と同じである．)

ここで具合がよくなかったのは，右辺に加えておいた小さい量 ε が第 1 反復で互いに打ち消し合ったことである．そのような打ち消し合いが決して起らない (したがって，すべての字引が退化していない) ことを保証するために，右辺の $b_1, b_2, \cdots, b_m$ を極端に異なる量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ だけ摂動させよう．より精確には，微小な ε_1 を選び，さらに各 ε_{i+1} を前の ε_i よりずっと小さなものにしていく：記号を使って書けば，

$$0<\varepsilon_m \ll \varepsilon_{m-1} \ll \cdots \ll \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1. \tag{3.4}$$

そこで，シンプレックス法を摂動した問題

最大化：　$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

制約：　$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i+\varepsilon_i \quad (i=1, 2, \cdots, m)$

$x_j \geq 0 \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$

に適用する．これが**摂動法** (perturbation method) である．(摂動法はふつう小さい数 ε のべき $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^m$ に等しい $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ を使って述べられるが，上のようにする方が以下の分析は多少見通しのよいものになる．) 説明のために，シンプレックス法が循環した最初の例にもどろう．そこでは，初期字引は次のようにな

る．

$$
\begin{array}{l}
x_5=\varepsilon_1 \quad -0.5x_1+5.5x_2+2.5x_3-9x_4 \\
x_6=\varepsilon_2 \quad -0.5x_1+1.5x_2+0.5x_3-x_4 \\
x_7=1+\varepsilon_3-x_1 \\
\hline
z= \quad 10x_1-57x_2-9x_3-24x_4.
\end{array}
$$

再び，入る変数は x_1 である．制約 $x_5\geqq 0, x_6\geqq 0, x_7\geqq 0$ が x_1 の増大をそれぞれ $2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 1+\varepsilon_3$ に制限する．$2\varepsilon_2<2\varepsilon_1<1+\varepsilon_3$ であるから，出る変数は x_6 で，次の字引は

$$
\begin{array}{l}
x_1=2\varepsilon_2 \quad +3x_2+x_3-2x_4-2x_6 \\
x_5=\varepsilon_1-\varepsilon_2 \quad +4x_2+2x_3-8x_4+x_6 \\
x_7=1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3-3x_2-x_3+2x_4+2x_6 \\
\hline
z= \quad 20\varepsilon_2 \quad -27x_2+x_3-44x_4-20x_6
\end{array}
$$

となる．いま，入る変数の候補は x_3 のみで，出る変数の候補も x_7 のみである．その結果得られる字引

$$
\begin{array}{l}
x_3=1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3 \quad -3x_2+2x_4+2x_6-x_7 \\
x_1=1+\varepsilon_3 \quad -x_7 \\
x_5=2+\varepsilon_1-5\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2x_2-4x_4+5x_6-2x_7 \\
\hline
z=1+18\varepsilon_2+\varepsilon_3 \quad -30x_2-42x_4-18x_6-x_7
\end{array}
$$

は摂動した問題に対する最適字引である．それは，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ を含むすべての項を除去するだけでもとの問題に対する最適字引に変換することができる．

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ の数値をどのように選ぶべきか？　最も簡単な答は，何もしなくてよいということである：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ の明確な値を与えようとするよりも，これらの記号は（3．4）を満足している不定量を表すものと考えた方がよいであろう．シンプレックス法の数回の反復の後に，これらの記号は字引のあちこちの行に散らばるけれども，それらは $m+1$ 個の各行における定数項に限られる．字引における非基底変数の係数は摂動によって影響を受けない．そこで，出る変数を見いだすことになったとき，基底変数 x_i に対する各制約 $x_i\geqq 0$ から，入る変数 x_j の増大

は $2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 1+\varepsilon_3$ のような量，より一般には

$$
r=r_0+r_1\varepsilon_1+\cdots+r_m\varepsilon_m,\quad s=s_0+s_1\varepsilon_1+\cdots+s_m\varepsilon_m \qquad (3.5)
$$

などのような量に制限される．すぐに説明するように，仮定（3．4）によって $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ の精確な値に頼らないでそのような量の数値を比較することができる．もし（3．5）の r と s が異なるならば，$r_k\neq s_k$ となるような最小の添字 k が存在する．$r_k<s_k$ のとき r は s より**辞書式に小さい**(lexicographically smaller) というのが慣例である．（**辞書式に**という用語を使う理由は，たとえば，辞書の中で"bust"が"button"の前にあるのと同じ理由で，$2+21\varepsilon_1+19\varepsilon_2+20\varepsilon_5$ が $2+21\varepsilon_1+20\varepsilon_2+20\varepsilon_3+15\varepsilon_4+14\varepsilon_5$ より辞書式に小さいことを観察すればわかる．）r が s より辞書式に小さいことが，（3．4）を満たすすべての $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ に対し r が s より数値的に小さいための必要十分条件であることを証明するのは容易である．このことは（3．4）における記号≪が何を意味するのかを特定することによって精確にされなければならない．その詳細は問題3．7として残す．

辞書式法 (lexicographic method) は，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ を記号として扱い，（3．5）の r や s のような量を辞書式規則によって比較する摂動法の実現である．辞書式規則によって出る変数を選ぶことがいつでもできることに注意しよう：（3．5）の r や s のような式のあらゆる有限集合の中で，他のすべてに対し辞書式に小さいか等しい式がつねに一つ存在するから．この事実は直観的にはわかりきったことだが，厳密にはその証明が必要であろう．その詳細は問題3．6に残す．もう一つの細かな点は目的関数の挙動に関係する．ある式 $v_0+v_1\varepsilon_1+\cdots+v_m\varepsilon_m$ に等しい z の値は退化している各反復では変化せず，退化していない反復ごとに辞書式な意味で増大する．（この例では，第1反復で0から $20\varepsilon_2$ へ増大し，引き続いて第2反復で $20\varepsilon_2$ から $1+18\varepsilon_2+\varepsilon_3$ へ増大している．）二つ以上の辞書式増大の総和が辞書式増大になることは直観的には明らかである．この事実の厳密な証明は問題3．5の結果から導かれる．そのことから辞書式法という一般化された情況においてさえも，循環は退化しているときに限って起りうることがわかる．最後に，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ を含む項のただ一つの働きは，もとの問題において出る変数の候補が二つ以上現れるとき，適切な選択法を与えてくれることである．これらの項をどの時点で除去しても，摂動した問題に対する字引はもとの問題に対する字引に帰着する．

> **定理 3．2**　各反復において出る変数を辞書式に選ぶ限り，シンプレックス法は終了する．

証明　直前に述べた注意によって，退化した字引が作られないことを証明するだけでよい．(すべての字引が退化していないならば，すべての反復は退化していない．その場合には，循環が起りえないので，定理 3．1 より所期の結論が得られる．) そこで，任意の字引の任意の行

$$x_k=(r_0+r_1\varepsilon_1+\cdots+r_m\varepsilon_m)-\sum_{j\notin B}d_jx_j \qquad (3.6)$$

を考えて，$m+1$ 個の数 $r_0, r_1, \cdots, r_m$ のうち少なくとも一つが 0 でないことを証明するだけでよい．(実際には，m 個の数 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ のうちの少なくとも一つが 0 でないことを証明する．) $d_k=1$ とし，x_k と異なるすべての基底変数 x_i に対して $d_i=0$ として，(3．6) を次のように書く．

$$\sum_{j=1}^{n+m}d_jx_j=r_0+\sum_{i=1}^{m}r_i\varepsilon_i. \qquad (3.7)$$

この方程式はスラック変数の定義

$$x_{n+i}=b_i+\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (3.8)$$

から代数的演算によって得られたから，それは(3．8)を満足する $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}$ と $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ をどのように選んでも成り立たねばならない．ゆえに，(3．8) を (3．7) に代入して得られる方程式

$$\sum_{j=1}^{n}d_jx_j+\sum_{i=1}^{m}d_{n+i}\Big(b_i+\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\Big)=r_0+\sum_{i=1}^{m}r_i\varepsilon_i$$

は数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ と $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ をどのように選んでも成り立たねばならない．この等式を

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(d_j-\sum_{i=1}^{m}d_{n+i}a_{ij}\Big)x_j+\sum_{i=1}^{m}(d_{n+i}-r_i)\varepsilon_i=r_0-\sum_{i=1}^{m}d_{n+i}b_i$$

のように書けば，各 x_j の係数，各 ε_i の係数，そして右辺は 0 に等しくなければならないことがわかる．したがって，次式が成り立つ．

$$d_{n+i}=r_i \qquad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (3.9)$$
$$d_j=\sum_{i=1}^{m}d_{n+i}a_{ij} \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

もしすべての数 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ が 0 に等しければ，式 (3．9) は $d_{n+i}=0\ (i=1,2,\cdots,m)$ かつ $d_j=0\ (j=1,2,\cdots,n)$ を意味するが，これは $d_k=1$ という事実に反する．■

定理 3．2 の結果得られた知識を使えば，あらゆる標準形の LP 問題は，右辺 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ に適当な小さい数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ を加えることによって摂動し，その摂動した問題にシンプレックス法を適用したとき終了するようにできることを証明するのは容易になる．実際には，数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ を任意の十分小さい正数 ε のべき $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^m$ に選ぶことができる．その詳細は問題 3．8 に残す．

上で見てきたように，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ を含む項は，出る変数に対する二つ以上の候補の間でタイブレークを行わなければならないときにだけ必要である．そこで，そのような必要が生ずるまで待って，そのときだけ特別な摂動を導入してもよい．この着想は P. Wolfe (1963) によって展開された．その辞書式版は G. B. Dantzig (1960) に由来する．

最小添字規則　この規則は，入る変数と出る変数の選択において，つねに最小の添字 k をもつ候補 x_k を選ぶことによってタイブレークを行うことをいう．このエレガントな概念の動機は次の結果によって与えられる．

> **定理 3．3**　〔R. G. Bland (1977)〕各反復において入る変数と出る変数を最小添字規則によって選ぶ限り，シンプレックス法は終了する．

証明　定理 3．1 によって，最小添字規則を使ったとき循環が起りえないことだけを示せばよい．そのために，最小添字規則によってある字引 D_0 が退化した反復の系列をたどってそれ自身に到るという仮定から矛盾を引きだそう．議論を明確にするために，この反復の系列が字引 $D_1, D_2, \cdots, D_k$ を作りだし，$D_k=D_0$ であるとしよう．これらの字引の中のいくつかでは非基底変数で，他の字引では基底変数となるような変数は**不定** (fickle) 変数と呼ばれる．x_t をすべての不定変数の中で最大の添字をもつものとしよう．系列 $D_0, D_1, \cdots, D_k$ の中に，x_t を出る変数としてもち，他のある不定変数 x_s を入る変数としてもつ字引 D が存在する (x_t は D では基底変数であるが次の字引で非基底変数となり，x_s は D では非基底変数であるが次の字引で基底変数となる)．さらに，系列 $D_0, D_1, \cdots, D_k, D_1, \cdots, D_k$ の中

に，x_t を入る変数としてもつ字引 D^* が存在しなければならない．Dを次のように書こう．

$$\begin{array}{l} x_i = b_i - \sum_{j \notin B} a_{ij} x_j \quad (i \in B) \\ \hline z = v + \sum_{j \notin B} c_j x_j. \end{array}$$

DからD^* に到るすべての反復は退化しているから，目的関数 z は両方の字引において同じ値 v をとらねばならない．したがって，D^* の最下行は，x_j がD^* の基底変数であるとき $c_j^*=0$ として，

$$z = v + \sum_{j=1}^{n+m} c_j^* x_j$$

と書ける．この方程式はDから代数的演算によって得られたから，それはDのあらゆる解によっても満たされねばならない．特に，それは，任意の y に対し，$x_s = y, x_j = 0$ ($j \notin B$ ただし $j \neq s$), $x_i = b_i - a_{is} y$ ($i \in B$) および $z = v + c_s y$ によって満たされねばならない．ゆえに，任意の y に対し，

$$v + c_s y = v + c_s^* y + \sum_{i \in B} c_i^* (b_i - a_{is} y)$$

および，これを整理して，

$$\left(c_s - c_s^* + \sum_{i \in B} c_i^* a_{is}\right) y = \sum_{i \in B} c_i^* b_i$$

を得る．最後の方程式の右辺は y に無関係な定数であるから，結局次式を得る．

$$c_s - c_s^* + \sum_{i \in B} c_i^* a_{is} = 0. \tag{3.10}$$

ここまで来れば後は容易である．x_s はDにおいて入る変数となるから，$c_s > 0$ である．x_s は D^* において入る変数ではなくて $s < t$ であるから，$c_s^* \leq 0$ である．ゆえに，(3.10) は，

$$\text{ある} r \in B \quad \text{に対し} \quad c_r^* a_{rs} < 0 \tag{3.11}$$

を意味する．$r \in B$ より，変数 x_r はDでは基底変数である．$c_r^* \neq 0$ より，同じ変数が D^* では非基底変数である．ゆえに，x_r は不定変数で，$r \leq t$ となる．実際，x_r は x_t とは異なる：x_t はDにおいて出る変数であるから，$a_{ts} > 0$ であり，したがって $c_t^* a_{ts} > 0$ となるから．そこで，$r < t$ となるが，x_r は D^* において入る変数ではない．したがって，$c_r^* > 0$ とはならない．(3.11) から，結局，

$$a_{rs} > 0$$

となる．Dから D^* に到るすべての反復は退化しているから，この二つの字引は同じ解を表す．特に，x_r の値は両方の字引において 0 であり (x_r は D^* で非基底変数である)，したがって，$b_r = 0$ である．ゆえに，x_r はDの基底を出る候補であった――$r < t$ であるにもかかわらず，我々は x_t を選んでしまったことになる．この矛盾により証明が完結する．■

もう一つの注意：シンプレックス法の終了は，あらゆる反復で最小添字規則を守らなくても保証できる．たとえば，最近の 50 回程度の反復が退化しているときにだけ最小添字規則に訴えて，退化していない反復が得られたらそれを棄て，別の規則によって入る変数と出る変数を選択してもよい．このようにすれば一連の退化している反復が生ずるたびにその後には退化していない反復が続き，したがって，各字引は有限回しか作られないであろう．

初期化

説明すべき唯一の残された点は，可能でない原点をもつ問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化：} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{制約：} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{array}$$

において初期可能字引を手に入れることである．可能でない原点に伴う困難には二つの側面がある．第1に，その問題がそもそも可能解をもつかどうかが明らかでないことがある．第2に，ある可能解が明白にわかったとしても，可能字引はわからないかもしれない．両方の障害に打ち勝つ一つの方法は，いわゆる**補助問題** (auxiliary problem)，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化：} & x_0 \\ \text{制約：} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 \leq b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, n) \end{array}$$

を使うことである．この補助問題の一つの可能解はただちに手に入る：実際 $1 \leq j \leq n$ に対する各 x_j の値を 0 とし，x_0 の値を十分大きくすればよい．さら

に，もとの問題が可能解をもつための**必要十分条件**はその補助問題が $x_0=0$ となる可能解をもつことであるということが容易にわかる．別な言い方をすれば，もとの問題が可能解をもつための必要十分条件はその補助問題の最適値が 0 であることである．そこで，我々の計画はまず補助問題を解くことである．この技法の詳細を次の問題を例として説明しよう．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化：} & x_1-\ x_2+\ x_3 \\ \text{制約：} & 2x_1-\ x_2+2x_3\leqq\ \ 4 \\ & 2x_1-3x_2+\ x_3\leqq-5 \\ & -x_1+\ x_2-2x_3\leqq-1 \\ & \qquad x_1, x_2, x_3\geqq\ \ 0. \end{array}$$

不必要な混乱を避けるために，補助問題を最大化の形で書く：

$$\begin{array}{ll} \text{最大化：} & -x_0 \\ \text{制約：} & 2x_1-\ x_2+2x_3-x_0\leqq\ \ 4 \\ & 2x_1-3x_2+\ x_3-x_0\leqq-5 \\ & -x_1+\ x_2-2x_3-x_0\leqq-1 \\ & \qquad x_0, x_1, x_2, x_3\geqq\ \ 0. \end{array}$$

スラック変数 x_4, x_5, x_6 と目的関数 w を定義する式を書き下して，可能でない字引

$$\begin{array}{l} x_4=\ \ 4-2x_1+\ x_2-2x_3+x_0 \\ x_5=-5-2x_1+3x_2-\ x_3+x_0 \\ x_6=-1+\ x_1-\ x_2+2x_3+x_0 \\ \hline w=\qquad\qquad\qquad\qquad\ -x_0 \end{array}$$

を得る．しかし，この可能でない字引は，x_0 が基底に入り，x_5 が基底から出る 1 回のピボット演算によって可能字引に変換することができる：

$$\begin{array}{l} x_0=\ \ 5+2x_1-3x_2+\ x_3+x_5 \\ x_4=\ \ 9\qquad\ -2x_2-\ x_3+x_5 \\ x_6=\ \ 4+3x_1-4x_2+3x_3+x_5 \\ \hline w=-5-2x_1+3x_2-\ x_3-x_5. \end{array}$$

一般に，補助問題は次のように書くことができる．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化：} & -x_0 \\ \text{制約：} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-x_0\leqq b_i \quad (i=1, 2, \cdots, m) \\ & \qquad x_j\geqq 0 \quad (j=0, 1, 2, \cdots, n). \end{array}$$

スラック変数 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ と目的関数 w を定義する式を書き下せば，可能でない字引

$$\begin{array}{l} x_{n+i}=b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+x_0 \quad (i=1, 2, \cdots, m) \\ \hline w\ \ =\qquad\qquad\qquad -x_0 \end{array}$$

が得られる．しかし，この可能でない字引は，x_0 が基底に入り，“最も可能でない”x_{n+k} が基底から出る 1 回のピボット演算によって可能字引に変換することができる．より精確には，出る変数はその負の値 b_k がすべての負の数 b_i の中で最大の絶対値をもつ x_{n+k} である．ピボット演算の後で，変数 x_0 は正の値 $-b_k$ をとり，一方各基底変数 x_{n+i} は非負の値 b_i-b_k をとる．いまや，補助問題をシンプレックス法によって解く準備ができた．いまの例では，計算は次のように進行する．

x_2 が入り，x_6 が出る第 1 反復：

$$\begin{array}{l} x_2=\ \ 1+0.75x_1+0.75x_3+0.25x_5-0.25x_6 \\ x_0=\ \ 2-0.25x_1-1.25x_3+0.25x_5+0.75x_6 \\ x_4=\ \ 7-\ 1.5x_1-\ 2.5x_3+\ 0.5x_5+\ 0.5x_6 \\ \hline w=-2+0.25x_1+1.25x_3-0.25x_5-0.75x_6. \end{array}$$

x_3 が入り，x_0 が出る第 2 反復：

$$\begin{array}{l} x_3=1.6-0.2x_1+0.2x_5+0.6x_6-0.8x_0 \\ x_2=2.2+0.6x_1+0.4x_5+0.2x_6-0.6x_0 \end{array} \qquad (3.12)$$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 3 - x_1 - x_6 + 2x_0 \\
\hline
w &= - x_0.
\end{aligned}
$$

最後の字引（3.12）は最適である．補助問題の最適値が0であるから，字引（3.12）はもとの問題の可能解 $x_1=0,\ x_2=2.2,\ x_3=1.6$ を示す．さらに，（3.12）はもとの問題の所期の可能字引に容易に変換することができる．所期の字引の最初の3行を得るには，（3.12）の最初の3行を x_0 を含むすべての項を省いて単に書き写せばよい：

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1.6 - 0.2x_1 + 0.2x_5 + 0.6x_6 \\
x_2 &= 2.2 + 0.6x_1 + 0.4x_5 + 0.2x_6 \qquad (3.13) \\
x_4 &= 3 - x_1 - x_6.
\end{aligned}
$$

最下行を得るためには，もとの目的関数

$$z = x_1 - x_2 + x_3 \qquad (3.14)$$

を非基底変数 x_1, x_5, x_6 によって表現しなければならない．このために，単に（3.13）を（3.14）に代入して，

$$
\begin{aligned}
z &= x_1 - (2.2 + 0.6x_1 + 0.4x_5 + 0.2x_6) + (1.6 - 0.2x_1 + 0.2x_5 + 0.6x_6) \\
&= -0.6 + 0.2x_1 - 0.2x_5 + 0.4x_6
\end{aligned}
$$

を得る．つまり，所期の字引は次のとおりである．

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1.6 - 0.2x_1 + 0.2x_5 + 0.6x_6 \\
x_2 &= 2.2 + 0.6x_1 + 0.4x_5 + 0.2x_6 \\
x_4 &= 3 - x_1 - x_6 \\
\hline
z &= -0.6 + 0.2x_1 - 0.2x_5 + 0.4x_6.
\end{aligned}
$$

明らかに，x_0 が補助問題の非基底変数のときには，同じ手続きがその最適解をもとの問題の可能解に変換する．

さて，一般的な情況をよく調べてみよう．補助問題とその最初の可能字引を作る方法はすでに学んだ．補助問題を解く過程で，x_0 以外にも基底から出る変数の候補をもつような字引に出会うかもしれない．そのときは，x_0 を実際の出る変数として選ぶのがごく自然である．このとき，ピボット演算の直

後に，次のような字引を得る：

x_0 は非基底変数で，したがって，w の値は0である．　(3.15)

明らかに，この性質をもつ可能字引は最適である．しかし，x_0 がまだ基底変数のままであるような補助問題の最適解に到達することもありうる．したがって，

x_0 が基底変数で，w の値が0でない　(3.16)

ような最適字引か，または，

x_0 が基底変数で，w の値が0である　(3.17)

ような最適字引を得ることがありうる．（3.17）の場合を調べよう．最後から一つ前の字引はまだ最適でなかったから，$w=-x_0$ の値は最後の反復で負から0へ変化したに違いない．別ないい方をすれば，基底変数 x_0 の値は最後の反復で正から0に減少せねばならなかった．しかし，そのとき x_0 は基底を出る候補であった．ところが，我々の方針に反してそれを選ばなかった．この矛盾は，（3.17）が生じえないことを示している．ゆえに，補助問題の最適字引は性質（3.15）か性質（3.16）のどちらかをもつ．前者の場合には，前に例で説明したようにもとの問題の可能字引を作り，もとの問題をシンプレックス法で解くことに着手する．後者の場合には，もとの問題が可能でないという結論を下すだけである．

この方針は**2段階シンプレックス法**（two-phase simlex method）として知られている．**第1段階**で補助問題を作ってそれを解く．もしその最適解が性質（3.15）をもつことがわかれば，**第2段階**に着手し，もとの問題そのものを解く．第8章で2段階シンプレックス法にもどろう．

線形計画法の基本定理

この名前は次の結果に対して冠せられる．

> **定理3.4**　標準形のあらゆるLP問題は次の三つの性質をもつ：
> (i) 最適解をもたないならば，可能でないか有界でないかのどちらかである．

(ii) 可能解をもてば，可能基底解をもつ．
(iii) 最適解をもてば，最適基底解をもつ．

証明 2段階シンプレックス法の第1段階は，その問題が可能でないことを見いだすか，そうでなければ，可能基底解を引き渡す．2段階シンプレックス法の第2段階は，その問題が有界でないことを見いだすか，そうでなければ，最適基底解を引き渡す． ■

第1の性質は，その制約が**狭義**の1次不等式 $\Sigma a_j x_j < b$ を含むような問題では成り立たないことに注意しよう．自明な例をとれば，問題

最大化： x 制約： $x<0$

は可能で，かつ有界であるが，それでも最適解をもたない．残りの二つの性質 (ii) と (iii) より，標準形の LP 問題の可能解または最適解を捜すときには，**有限**集合に捜索範囲を限ってよいことがわかる．これら二つの性質は，最初からそれらを容易に確認することができるので，シンプレックス法を誘導するためにしばしば使われる．我々の説明は，問題を現実に解くことに重点を置いた逆向きのパターンに従った——そして，線形計画法の基本定理が，その結果として容易に得られた．

問 題

△**3．1** 最大化： $x_1+3x_2-x_3$

制約：
$$\begin{aligned}2x_1+2x_2-x_3&\leqq 10\\ 3x_1-2x_2+x_3&\leqq 10\\ x_1-3x_2+x_3&\leqq 10\\ x_1, x_2, x_3&\geqq 0.\end{aligned}$$

3．2 タブロー形式で，ピボット行を選択するための自然なタイブレーク規則はタブローの上方に現れる行を優先する．（H.W.Kuhn によって作られた）次の例では，このタイブレーク規則が循環を生ずることを示せ：

最大化： $2x_1+3x_2-x_3-12x_4$

制約：
$$\begin{aligned}-2x_1-9x_2+x_3+9x_4&\leqq 0\\ \frac{1}{3}x_1+x_2-\frac{1}{3}x_3-2x_4&\leqq 0\\ x_1, x_2, x_3, x_4&\geqq 0.\end{aligned}$$

3．3 問題3．2を摂動法によって解け．

3．4 以下の式を辞書式に最小のものから辞書式に最大のものへと1列に並べよ：

$3-\varepsilon_1$
3
$2+10\varepsilon_1$
$3-4\varepsilon_1+\varepsilon_2$
$\varepsilon_2+3\varepsilon_3$
$3+4\varepsilon_1+\varepsilon_3$
$3-4\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$

3．5 証明せよ：$r=r_0+r_1\varepsilon_1+\cdots+r_m\varepsilon_m$ が $s=s_0+s_1\varepsilon_1+\cdots+s_m\varepsilon_m$ より辞書式に小さく，s が $t=t_0+t_1\varepsilon_1+\cdots+t_m\varepsilon_m$ より辞書式に小さいならば，r は t より辞書式に小さい．

3．6 問題3．5の結果を用いて，（3．5）の r や s のような相異なる式のあらゆる有限集合において，他のすべての式より辞書式に小さい式が存在することを証明せよ．

3．7 （3．5）のような式のあらゆるペアについて，次の二つの事柄が同等であるような正数 δ が存在することを証明せよ：
(i) r は s より辞書式に小さい．

(ii) $0<\varepsilon_1<\delta$ かつ $0<\varepsilon_i<\delta\varepsilon_{i-1}$ $(i=2,3,\cdots,m)$となるような数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ のあらゆる選び方に対し，r は s より辞書式に小さい．

3.8 定理3.2と問題3.7の結果を用いて次のことを証明せよ．あらゆるLP問題

$$\text{最大化：}\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{制約：}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqq b_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

$$x_j\geqq 0\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

に対し，問題

$$\text{最大化：}\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{制約：}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqq b_i+\varepsilon^i\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

$$x_j\geqq 0\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

を解くために使われたシンプレックス法が，$0<\varepsilon<\delta$ のときには必ず終了するような正数 δ が存在する．

△**3.9** 以下の問題を2段階シンプレックス法で解け：

a．最大化：　$3x_1+x_2$

制約：
$$x_1-x_2\leqq -1$$
$$-x_1-x_2\leqq -3$$
$$2x_1+x_2\leqq 4$$
$$x_1,x_2\geqq 0.$$

b．最大化：　$3x_1+x_2$

制約：
$$x_1-x_2\leqq -1$$
$$-x_1-x_2\leqq -3$$
$$2x_1+x_2\leqq 2$$
$$x_1,x_2\geqq 0.$$

c．最大化：　$3x_1+x_2$

制約：
$$x_1-x_2\leqq -1$$

$$-x_1-x_2\leqq -3$$
$$2x_1-x_2\leqq 2$$
$$x_1,x_2\geqq 0.$$

3.10 証明せよ，あるいは，反証を示せ：最下行が $z=z^*+\sum\bar{c}_jx_j$ であるような可能字引が最適解を表すための必要十分条件は，すべての j に対し $\bar{c}_j\leqq 0$ となることである．